FINANCE A ÚVĚR 12/1995
ročník 45

Vydává Ministerstvo financí České republiky ve spolupráci s Českou národní bankou ve vydavatelství Economia, a. s., Praha

Adresa redakce: Vinohradská 49
120 74 Praha 2
Tel.: (02) 253 018 nebo: (02) 215 93 614
Fax: (02) 253 728

Šéfredaktor: Ing. Ivan Kočárník, CSc.

FINANCE A ÚVĚR 12/1995
Volume 45

Publishers: Ministry of Finance of the Czech Republic in Cooperation with Czech National Bank in Publishing House Economia, Prague

Editor's Office: Vinohradská 49
120 74 Prague 2
Czech Republic

Editor in Chief: Ivan Kočárník

OBSAH

CONTENTS

DT: 336.763.3; 336.763; 336.76 (437)

Durace a konvexita dluhopisů

Josef JÍLEK*

Při výběru dluhopisů investor zvažuje kromě výnosu do splatnosti také další faktory. Jedním z nich je cenová citlivost dluhopisů. Cenovou citlivostí zde rozumíme vliv změny výnosu do splatnosti na cenu dluhopisu. Většina investorů má averzi vůči riziku, a proto dává přednost nákupu dluhopisů s menší cenovou citlivostí. Má tak větší jistotu, že v případě nepříznivé změny úrokové míry se cena dluhopisu změní méně než v případě nákupu dluhopisů s větší cenovou citlivostí. Tento argument platí pouze pro případ prodeje dluhopisu před datem splatnosti. Pokud investor nemá pochyb, že bude držet dluhopis až do splatnosti, potom pro něho cenová citlivost není důležitá vůbec. Nutnost prodeje dluhopisu před splatností však nemůže žádný investor zcela vyloučit. Z toho vyplývá, že na trhu jsou žádanější dluhopisy s menší cenovou citlivostí. Zvýšená poptávka po takových dluhopisech však zvyšuje jejich ceny, a tím klesá jejich výnos do splatnosti.

Protože dluhopisy s kratší dobou splatnosti mají obecně menší cenovou citlivost, lze cenovou citlivostí vysvětlit skutečnost, že výnosová křivka státních dluhopisů většiny zemí má častěji rostoucí průběh. I když výnosová křivka je určena zejména očekávanými úrokovými mírami, cenová citlivost dluhopisů poněkud deformuje její tvar tak, že snižuje výnosy s kratší splatností. Proto rostoucí výnosové křivky převažují nad klesajícími výnosovými křivkami.

Kvantifikovat cenovou citlivost dluhopisů je možné pomocí jediného parametru — *durace* (duration). Durace současně slouží k rychlému stanovení nové ceny dluhopisu při změně výnosu do doby splatnosti. *Konvexita* (convexity) slouží k přesnějšímu stanovení nové ceny dluhopisu.

Diskontované dluhopisy

Nejjednodušším dluhopisem je *diskontovaný dluhopis*. Emise diskontovaného dluhopisu zavazuje emitenta splatit k určitému datu nominální hodnotu („face value" nebo „par value"). Na primárním a sekundárním trhu se tento dluhopis prodává za cenu nižší, než je nominální hodnota. Rozdíl mezi nominální hodnotou a cenou prodeje je diskont („discount"). Diskontovaný dluhopis nemá kuponové splátky mezi emisí a dobou splatnosti nominální hodnoty.

Mezi cenou dluhopisu P o nominální hodnotě FV a výnosem do splatnosti r platí vztah:

---

* Doc. Ing. Josef Jílek, odbor bankovního dohledu ČNB

Redakce příspěvek obdržela v březnu 1995, autorská korektura provedena začátkem listopadu 1995.

$$P = \frac{FV}{(1+r)^t} \qquad (1)$$

kde t označuje dobu mezi emisí a splatností nominální hodnoty v letech. Jako příklad předpokládejme diskontovaný dluhopis s dobou splatnosti dva roky a s nominální hodnotou 1 000 Kč. Jestliže je cena dluhopisu 818,98 Kč, potom výnos do splatnosti r se určí podle vztahu:

$$818{,}98 = \frac{1\,000}{(1+r)^2}$$

odkud dostaneme $r = 10{,}5$ %. Jestliže emitent splní svůj závazek a splatí nominální hodnotu, potom majitel dluhopisu bude realizovat spočtený výnos do doby splatnosti. Čím rizikovější je splacení nominální hodnoty, tím vyšší musí být výnos do splatnosti, aby emitent přilákal investory. Emitenti s lepším hodnocením mohou vydávat dluhopisy za vyšší cenu. Takto získané prostředky jsou pro ně lacinější.

Diskontované dluhopisy ČNB, FNM a MF ČR

V ČR emitují diskontované dluhopisy různé subjekty. Zvláště velké objemy diskontovaných dluhopisů emituje Česká národní banka (poukázky ČNB), Fond národního majetku (poukázky FNM) a Ministerstvo financí ČR (poukázky MF zvané též „státní pokladniční poukázky" — nepřesným překladem z „Treasury bonds"). Emise všech těchto dluhopisů je koordinována. Poukázky ČNB jsou v České republice důležitým dluhovým nástrojem pro řízení likvidity finančního systému, neboť jejich emisí se snižuje peněžní zásoba. Poukázky ostatních emitentů slouží emitentovi primárně k získávání prostředků. Vliv na peněžní zásobu se projeví pouze v případě, že s nimi obchoduje centrální banka.

Na konci ledna 1995 drželi vlastníci diskontované dluhopisy ČNB, FNM a MF ČR celkem za 143 mld. Kč (viz *tabulka č. 1*). Jejich emise probíhá podle určitého harmonogramu a vypršení jednoho dluhopisu se obvykle nahrazuje emisí jiného o téže nominální hodnotě. Tabulka č. 1 uvádí také používané doby splatnosti („maturity") jednotlivých emitentů, které činí 13, 26, 39 a 53 týdnů. Jmenovitá hodnota jednoho dluhopisu je 1 mil. Kč, znějí na doručitele a vydávají se v zaknihované podobě. Poukázky se prodávají za cenu nižší, než je nominální hodnota. V době splatnosti doručitel obdrží jmenovitou hodnotu (u dluhopisů ČNB a FNM sníženou o daň z diskontu). Výpočet výnosu do splatnosti probíhá na bázi roku o 360 dnech a skutečného kalendářního počtu dnů (act/360). Úrokový výnos poukázek ČNB a FNM je zdaňován daní z příjmů (25 %). Na burzách se s těmito dluhopisy neobchoduje.

TABULKA č. 1 Emisní objem diskontovaných dluhopisů v ČR na konci ledna 1995

název dluhopisu	emitovaný objem [mld. Kč]	doba splatnosti [dny (týdny)]
poukázky ČNB	100	91 (13), 182 (26)
poukázky FNM	16	182 (26)
poukázky MF	27	91 (13), 182 (26), 273 (39), 364 (52)
celkem	143	

Primární prodej poukázek ČNB, FNM a MF ČR se obvykle provádí formou aukce (holandské) pro skupinu přímých účastníků (asi 50), vybraných zejména z českých bank. Účastníci předkládají nabídky cen, za které jsou ochotni poukázky koupit. Nabídky se seřadí od nejvyšší k nejnižší nabízené ceně a uspokojí se odshora podle nabízeného objemu. Poslední cena je cenou pro každého uspokojeného účastníka dražby. To znamená, že každá emise se prodává za jednotnou cenu. Poukázky jsou přímými nepodmíněnými a nepodřízenými závazky emitenta.

Kuponové dluhopisy

Kuponové dluhopisy jsou dluhovými nástroji s podstatně delší dobou splatnosti. Vlastnictví těchto dluhopisů opravňuje k pravidelným příjmům mezi emisí a splatností nominální hodnoty. Pravidelné platby se nazývají kupony. Většinou se vyplácejí ročně nebo pololetně. Na konci doby splatnosti se stejně jako u diskontovaných dluhopisů vyplácí nominální hodnota dluhopisu. Pro kuponový dluhopis platí oceňovací vztah:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} \qquad (2)$$

kde C_i představuje platbu v čase t_i (tj. kupon nebo nominální hodnotu) a n počet plateb. Poslední kupon je běžně splatný společně s nominální hodnotou, tj. v den splatnosti dluhopisu emitent vyplácí poslední kupon a nominální hodnotu. Jako příklad uveďme kuponový dvouletý dluhopis s nominální hodnotou 1 000 Kč a ročním kuponem 8 % (tj. 80 Kč). Jestliže cena dluhopisu je 963,60 Kč, potom výnos do splatnosti r dostaneme řešením rovnice:

$$963{,}60 = \frac{80}{(1+r)} + \frac{1\,080}{(1+r)^2}$$

z níž vyplývá $r = 10{,}1$ %. V případě pololetního kuponu 4 % a stejné ceny 963,60 Kč dluhopis s nominální hodnotou 1 000 Kč vynáší $r = 10{,}3$ % dané rovnicí:

$$963{,}60 = \frac{40}{(1+r)^{0{,}5}} + \frac{40}{(1+r)^{1}} + \frac{40}{(1+r)^{1{,}5}} + \frac{1\,040}{(1+r)^{2}}$$

Kuponové dluhopisy v ČR

V České republice emituje kuponové dluhopisy Ministerstvo financí ČR (státní dluhopisy), velké společnosti a města. Město Praha dokonce emitovalo v zahraničí dolarové dluhopisy. Ke konci ledna 1995 drželi vlastníci státní kuponové (střednědobé) dluhopisy o celkové nominální hodnotě asi 32 mld. Kč. Dlouhodobé dluhopisy se splatností vyšší než 10 let se dosud v ČR neemitují. Se státními kuponovými dluhopisy se obchoduje na Burze cenných papírů Praha. Hlavními údaji kurzovního lístku je kurz (udává se v procentech nominální hodnoty, např. jako 104,20 %), objem obchodu, alikvótní úrokový výnos (udává se v Kč, např. 331,46 Kč) a hrubý výnos do splatnosti (udává se v procentech, např. jako 8,11 %). Protože státní dluhopisy nejsou zdaněny, platí pro ně, že čistý výnos do splatnosti se rovná hrubému výnosu do splatnosti. Jednotlivé pojmy si dále objasníme.

Dále se zaměříme pouze na státní dluhopisy ČR, konkrétně na pětiletý státní dluhopis s kuponem 9,25 %. Jeho emitentem je ČR zastoupená Ministerstvem financí ČR. Dluhopis byl emitován 12. 8. 1994 v objemu 5,0125 mld. Kč a s nominální hodnotou 10 000 Kč. Primární emise se zúčastnilo 20 přímých účastníků, zejména české banky (ale také jeden obchodník s cennými papíry a jedna investiční společnost). Úrokové výnosy jsou osvobozeny od daně z příjmů. Dluhopis zní na doručitele a byl vydán v zaknihované podobě. Evidenci vede Středisko cenných papírů. Dluhopis mohou nabývat právnické a fyzické osoby se sídlem nebo bydlištěm na území ČR i v zahraničí. Repatriace výnosů a splacené nominální hodnoty do zahraničí se provádí podle právních předpisů ČR. Dluhopis je veřejně obchodovatelný a je kótován na Burze cenných papírů Praha. Představuje přímé, nepodmíněné a nepodřízené závazky ČR.

Primární prodej výše uvedeného dluhopisu proběhl americkou aukcí. Konkurenční nabídky přímých účastníků obsahovaly požadovaný objem a požadovaný výnos do splatnosti. Nekonkurenční nabídky obsahovaly pouze požadovaný objem. Konkurenční nabídky se seřadily podle nabízeného výnosu do splatnosti a uspokojily se až do vyčleněného objemu. Z nich se stanovila pevná kuponová míra, a to jako průměrný výnos do splatnosti vypočtený z uspokojených konkurenčních objednávek. Nekonkurenční objednávky byly uspokojeny za průměrný výnos. Poté se stanovila nákupní cena pro jednotlivé objednávky, tzn. že nákupní cena dluhopisů jednotlivých účastníků nebyla jednotná.

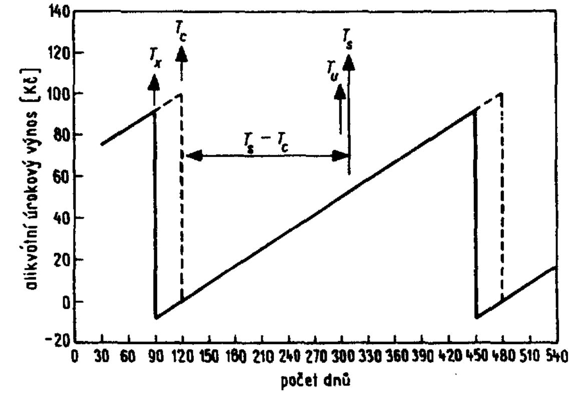
Nově emitované dluhopisy již většinou splňují standardy Burzy cenných papírů Praha (BCPP) pro obchodování na sekundárním trhu. Standardy BCPP upravují výpočet alikvótního úrokového výnosu dluhopisů, výpočet výnosu dluhopisů a časový režim uplatňování práv spojených s dluhopisy a akciemi. Pro účely uplatňování práv spojených s držením dluhopisů BCPP zavádí pojem „datum ex-kupon". Standard BCPP respektuje pravidla č. 251 stanovená asociací International Securities Markets Association (ISMA).

Obecně platí, že cena dluhopisu neodpovídá skutečné ceně, kterou investor za dluhopis zaplatí. Zaplacená částka se totiž rovná ceně dluhopisu plus *alikvótní úrokový výnos* (AÚV) — díl dalšího kuponu, který naběhl od výplaty předchozího kuponu až do prodeje dluhopisu. Jako příklad uveďme dluhopis s nominální hodnotou 1 000 Kč s ročním kuponem 10 %, tj. 100 Kč. Plná čára na *grafu č. 1* znázorňuje průběh AÚV podle standardu BCPP. Přerušovaná čára uvádí naběhlou část kuponu. T_x označuje datum ex-kupon, T_c datum výplaty kuponu, T_u datum uzavření obchodu a T_s datum vypořádání. Tento standard řeší problém určení investora, kterému se kupon vyplatí. Datum ex-kupon je 30 kalendářních dní před dnem výplaty kuponu. Situaci, že AÚV je mezi datem ex-kupon a datem výplaty kuponu záporný, kompenzuje skutečnost, že nakupující, který získá dluhopis v tomto časovém rozmezí, už nemá nárok na výplatu nejbližšího kuponu (takový investor zaplatí částku nižší, než je cena dluhopisu, o absolutní hodnotu záporného AÚV). Pro výpočet počtu dní výnosového období doporučuje BCPP standard 30 E/360. Každý ukončený měsíc je počítán jako 30denní (včetně února), takže rok má 360 dní. V běžném měsíci se počítá aktuální počet dní, max. však 30. Počet dní výnosového období se rovná počtu dní mezi datem výplaty posledního kuponu T_c (včetně) a datem vypořádání obchodu T_x (nezahrnuto). Pro AÚV proto platí:

$$AÚV = \frac{T_s - T_c}{360} C \qquad (3)$$

kde C označuje kupon, tj. v našem případě 100 Kč.

GRAF č. 1 Průběh alikvótního úrokového výnosu v závislosti na době podle Standardu BCPP



Podívejme se zpět na výše uvedený státní dluhopis s kuponovou mírou 9,25 %. Dne 16. 12. 1994 jeho kurz činil 104,2 %. Počet dní výnosového období $T_s - T_c$ je dán součtem:

— počtu dní v měsíci, kdy se vyplácí kupon, tj. (30 − 12 + 1) = 19 dní;
— počtu dní v každém celém naběhnutém měsíci mezi výplatou a uvažovaným datem vypořádání obchodu, tj. 3 . 30 = 90 dní;
— počtu dní v měsíci vypořádání obchodu, tj. (16 − 1 + 3 + 2) = 20 dní, přičemž uvažujeme vypořádání $T_s = T_u + 3$. Protože se do dnů vypořádání počítají pouze pracovní dny a protože den 16. 12. 1994 připadl na pátek, bylo v tomto případě nutné přičíst další dva dny.

Výnosové období tedy činí 19 + 90 + 20 = 129 dní. AÚV tudíž činí:

$$A\acute{U}V = \frac{129}{360}\, 925 \text{ Kč} = 331{,}46 \text{ Kč}$$

Nyní můžeme spočítat výnos do splatnosti r řešením rovnice:

$$10\,420 + 331{,}46 = \frac{925}{(1+r)^{\frac{360-129}{360}}} + \frac{925}{(1+r)^{1+\frac{360-129}{360}}} + \frac{925}{(1+r)^{2+\frac{360-129}{360}}} +$$

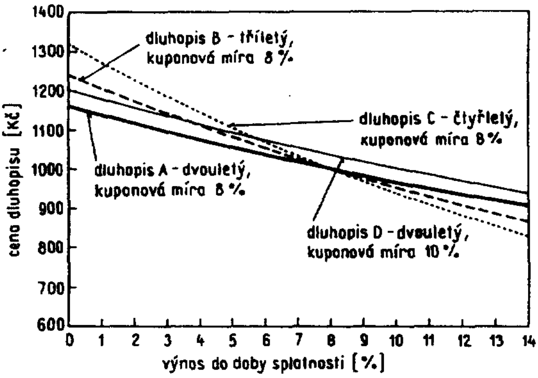
$$+ \frac{925}{(1+r)^{3+\frac{360-129}{360}}} + \frac{10\,925}{(1+r)^{4+\frac{360-129}{360}}}$$

Iterační nebo jinou aproximační metodou dostaneme hrubý výnos ke dni splatnosti $r = 8{,}106$ %. Hrubý výnos označuje výnos neočištěný od daně z příjmu. V daném případě státního dluhopisu je hrubý výnos shodný s čistým výnosem.

Faktory působící na cenu kuponových dluhopisů

Cena dluhopisu (očištěná od kuponu) musí postupně konvergovat k nominální hodnotě dluhopisu, protože cena dluhopisu v době jeho splatnosti musí být shodná s nominální hodnotou. Například výše uvedený dluhopis s ročními kupony a s jmenovitou hodnotou 1 000 Kč má v době splatnosti cenu také

GRAF č. 2 Závislost ceny dluhopisu s jmenovitou hodnotou 1 000 Kč na době splatnosti a kuponové míře



1 000 Kč. To platí bez ohledu na další faktory, které cenu dluhopisu ovlivňují.

Vliv změny úrokové míry (výnosu do splatnosti) na cenu dluhopisu závisí na třech hlavních faktorech:

— době splatnosti („maturity"),
— kuponové míře,
— úrovni úrokové míry.

Existuje pět základních principů, které vysvětlují změnu ceny dluhopisu při změně úrokové míry:

1. cena dluhopisu se mění opačně než úroková míra. Znamená to, že zvyšuje-li se úroková míra, cena dluhopisu klesá a naopak;
2. dluhopisy s delší dobou splatnosti mají větší procentní změnu ceny při určité změně úrokové míry;
3. cenová citlivost podle předchozího bodu se sice s delší dobou splatnosti zvyšuje, ale pomaleji;
4. dluhopisy s menším kuponem mají větší procentní změnu ceny;
5. absolutní zvýšení ceny dluhopisu způsobené poklesem úrokové míry je vyšší než absolutní snížení ceny dluhopisu způsobené vzestupem úrokové míry o stejnou hodnotu.

Všech pět principů vyplývá ze vztahu (2) a z příkladů v *tabulce č. 2 a 3* a v *grafu č. 2.* První princip je triviální. Druhý princip dokumentuje graf č. 2 a tabulka č. 2, kde jsou spočteny ceny dluhopisů A, B a C s nominální hodnotou 1 000 Kč, kuponovou mírou 8 % a s dobou splatnosti 2, 3 a 4 roky. Základní výnos do splatnosti se uvažuje 9 %. Při snížení výnosu do splatnosti na 8 % je zřejmé zvýšení citlivosti ceny se zvýšením doby splatnosti dluhopisů z 1,79 % na 2,60 % a na 3,35 %. Při zvýšení výnosu do splatnosti na 10 % se citlivost ceny se zvýšením doby splatnosti dluhopisů také zvyšuje — v daném případě z 1,75 % na 2,51 % a na 3,20 %.

Tabulka č. 2 dokumentuje třetí princip. Z výše uvedených hodnot citlivosti cen dluhopisů při snížení výnosu do doby splatnosti vyplývá rozdíl mezi citlivostí tříletého a dvouletého dluhopisu 0,81 % a rozdíl mezi citlivostí čtyřletého a tříletého dluhopisu 0,75 %. Čtvrtý princip vysvětluje tabulka č. 3, kde jsou spočteny ceny dluhopisů A a D s nominální hodnotou 1 000 Kč, dobou splatnosti 2 roky a s kuponovou mírou 8 a 10 %. Základní výnos do splatnosti se

TABULKA č. 2 Vliv doby do splatnosti na citlivost ceny dluhopisu

výnos do splatnosti	dluhopis A: FV = 1 000 Kč, C = 8 %, n = 2 roky			dluhopis B: FV = 1 000 Kč, C = 8 %, n = 3 roky			dluhopis C: FV = 1 000 Kč, C = 8 %, n = 4 roky		
	cena [Kč]	abs. změna [Kč]	rel. změna [%]	cena [Kč]	abs. změna [Kč]	rel. změna [%]	cena [Kč]	abs. změna [Kč]	rel. změna [%]
8 %	1 000,00	17,59	1,79	1 000,00	25,31	2,60	1 000,00	32,40	3,35
9 %	982,41	—	—	974,69	—	—	967,60	—	—
10 %	965,29	17,14	1,75	950,26	24,43	2,51	936,60	31,00	3,20

TABULKA č. 3 Vliv kuponové míry na citlivost ceny dluhopisu

výnos do splatnosti	dluhopis A: FV = 1 000 Kč, C = 8 %, n = 2 roky			dluhopis D: FV = 1 000 Kč, C = 10 %, n = 2 roky		
	cena [Kč]	abs. změna [Kč]	rel. změna [%]	cena [Kč]	abs. změna [Kč]	rel. změna [%]
8 %	1 000,00	17,59	1,79	1 035,67	18,08	1,78
9 %	982,41	—	—	1 017,59	—	—
10 %	965,29	17,14	1,75	1 000,00	17,59	1,73

uvažuje 9 %. Při snížení výnosu do splatnosti na 8 % je zřejmé snížení citlivosti ceny se zvýšením kuponové míry z 1,79 % na 1,78 %. Při zvýšení výnosu na 10 % se citlivost ceny se zvýšením kuponové míry dluhopisů také snižuje — zde z 1,75 % na 1,73 %.

Pátý princip, tj. absolutní zvýšení ceny dluhopisu způsobené poklesem úrokové míry je vyšší než absolutní snížení ceny dluhopisu způsobené vzestupem úrokové míry o stejnou hodnotu, je patrný z absolutních změn u libovolného dluhopisu v tabulkách č. 2 a 3. Vezměme například dluhopis A s nominální hodnotou 1 000 Kč, kuponovou mírou 8 % a dobou splatnosti 2 roky. Při snížení výnosu do doby splatnosti z 9 na 8 % činí absolutní zvýšení ceny 17,59 Kč. Při zvýšení výnosu do doby splatnosti z 9 na 10 % představuje absolutní snížení ceny 17,14 %.

Příklady ukazují na dvě důležité skutečnosti. Za prvé, při konstantní kuponové míře a konstantní době splatnosti má dluhopis s vyšším výnosem do splatnosti nižší cenovou citlivost. Za druhé, dluhopisy s různou kuponovou mírou a různými dobami splatnosti mají různou citlivost na změnu úrokové míry. U takových dluhopisů je obtížné porovnat citlivost. Proto je užitečné mít komplexní míru cenové citlivosti dluhopisů, která by odrážela dobu splatnosti, kuponovou míru a výnos do doby splatnosti. Takovou mírou je durace.

Pojem durace a konvexita

Vztah (2) udává přímou závislost mezi cenou dluhopisu a výnosem do splatnosti. Obchodníky s dluhopisy zajímá, jak se změní cena dluhopisu při malé změně výnosu do splatnosti dr, ke které dojde pohybem úrokových sazeb, tj. jaká je cenová citlivost daného dluhopisu. Pro malou změnu ceny dluhopisu dP platí Taylorův rozvoj:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r}\,dr + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 P}{\partial r^3} + \dots \quad (4)$$

Uvažujeme-li na pravé straně rovnice (4) pouze dva členy a cenu dluhopisu P vyjádřenou rovnicí (2), potom vztah (4) po první a druhé derivaci ceny P nabývá tvaru:

$$dP \approx -\frac{1}{(1+r)}\sum_{t=1}^{n}\frac{t\,C_t}{(1+r)^t}\,dr + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+r)^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)\,C_t}{(1+r)^t}\,dr^2 \quad (5)$$

Pojem *durace* rozvinul Frederick Macaulay. Durace ve formě jednoho čísla shrnuje vliv všech faktorů, které ovlivňují cenovou citlivost dluhopisu se změnou výnosu do splatnosti. Durace závisí na třech základních faktorech — době splatnosti, kuponové míře a na výnosu do doby splatnosti. Durace D dluhopisu je dána vztahem:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{t\,C_t}{(1+r)^t}}{P} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{t\,C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C_t}{(1+r)^t}} \quad (6)$$

Jmenovatel durace počítá cenu dluhopisu, tj. součet současných hodnot každého hotovostního toku (cash-flow). Čitatel počítá součet současných hodnot každého hotovostního toku s tím, že každý hotovostní tok se váží dobou výplaty hotovostního toku. Durace je tedy váženým průměrem současných hodnot hotovostního toku (kuponů včetně splacení nominální hodnoty), kde váhovým faktorem je doba mezi současností a hotovostním tokem.

Konvexitu K zavedeme vztahem:

$$K = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{t(1+t)\,C_i}{(1+r)^i} \quad (7)$$

S uvážením definic pro duraci a konvexitu se vztah (5) zjednodušuje:

$$dP \approx -D\frac{P}{(1+r)}\,dr + \frac{1}{2}K\,dr^2 \quad (8)$$

Uvažujeme-li pouze první člen Taylorova rozvoje, dostaneme:

$$dP \approx -D\frac{P}{(1+r)}\,dr \quad (9)$$

Vztah (9) lze také upravit na tvar, podle něhož je durace přibližně rovna podílu záporné změny relativní změny ceny dluhopisu a relativní změny diskontního faktoru $(1 + r)$, tj.:

$$D \approx -\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{d(1+r)}{(1+r)}} \quad (10)$$

Durace jakožto míra cenové citlivosti dluhopisu tak udává, jak se změní cena dluhopisu při změně diskontního faktoru $d(1 + r)$. Abychom mohli rovnici

(9) použít, musíme znát původní výnos do splatnosti, původní cenu, změnu výnosu do splatnosti a duraci dluhopisu.

Výpočet durace a konvexity pro celoroční období do splatnosti

Výpočet durace a konvexity ilustrujeme na příkladu dluhopisu A z tabulky č. 2. Jedná se o dvouletý dluhopis s nominální hodnotou 1 000 Kč, s kuponovou mírou 8 % a s výnosem 9 %. Potom pro jeho cenu *P*, duraci *D* a konvexitu *K* platí:

$$P = \frac{80}{1{,}09} + \frac{1\,080}{1{,}09^2} = 982{,}40 \text{ Kč}$$

$$D\,.\,P = \frac{1\,.\,80}{1{,}09} + \frac{2\,.\,1\,080}{1{,}09^2} = 1\,891{,}41 \text{ Kč}$$

$$D = \frac{1\,891{,}41}{982{,}40} = 1{,}925 \text{ let}$$

$$K\,.\,(1 + r)^2 = \frac{1\,.\,2\,.\,80}{1{,}09} + \frac{2\,.\,3\,.\,1\,080}{1{,}09^2} = 5\,600{,}88$$

$$K = \frac{5\,600{,}88}{1{,}09^2} = 4\,714{,}15$$

Jestliže se výnos do doby splatnosti náhle sníží na 8 %, potom cena dluhopisu podle vztahu (9), který uvažuje pouze duraci, vzroste o:

$$\mathrm{d}P = -\,1{,}925\,\frac{-\,0{,}01}{1 + 0{,}09}\,982{,}41 \text{ Kč} = 17{,}35 \text{ Kč}$$

Nová cena dluhopisu bude rovna staré ceně plus změna ceny:

$$\textit{nová cena} = 982{,}41 \text{ Kč} + 17{,}35 \text{ Kč} = 999{,}76 \text{ Kč}$$

Přesný výpočet podle tabulky č. 2 vedl k ceně 1 000 Kč. Absolutní chyba nové ceny dluhopisu za použití metody durace činí 0,24 Kč. Odpovídající relativní chyba činí 0,24 Kč/982,41 Kč, tj. 0,024 %.

Při zvýšení výnosu z 9 % na 10 % bude změna ceny dP = −17,35 Kč. Nová cena dluhopisu bude rovna:

$$\textit{nová cena} = 982{,}41 \text{ Kč} - 17{,}35 \text{ Kč} = 965{,}06 \text{ Kč}$$

Přesný výpočet podle tabulky č. 2 vedl k ceně 965,29 Kč. Absolutní rozdíl mezi dvěma metodami výpočtu nové ceny činí 0,23 Kč a představuje absolutní chybu spočívající v metodě durace. Odpovídající relativní chyba činí 0,23 Kč/982,41 Kč, tj. 0,023 %.

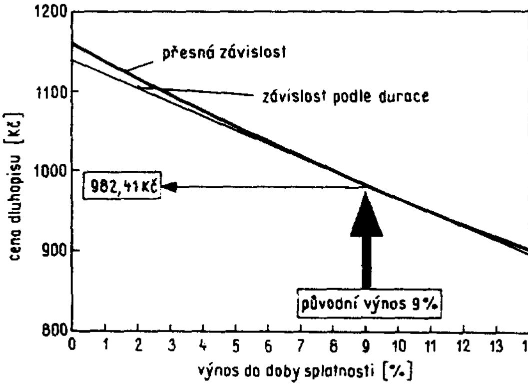
Uvažujeme-li také konvexitu, potom pro změnu ceny dluhopisu dP při snížení výnosu z 9 % na 8 % platí rovnice (8):

$$\mathrm{d}P = -\,1{,}925\,\frac{-\,0{,}01}{1 + 0{,}09}\,982{,}41 \text{ Kč} + \frac{1}{2}\,4\,714{,}15\,.\,0{,}01^2 = 17{,}35 + 0{,}23 = 17{,}58 \text{ Kč}$$

Nová cena dluhopisu bude rovna staré ceně plus změna podle rovnice (9):

$$\textit{nová cena} = 982{,}41 \text{ Kč} + 17{,}58 \text{ Kč} = 999{,}99 \text{ Kč}$$

GRAF č. 3 Porovnání metody durace a přesné závislosti ceny dluhopisu na výnosu do splatnosti



V čem spočívá velmi malý rozdíl mezi dvěma metodami výpočtu nové ceny dluhopisu? Metoda durace přesně platí pro velice malé změny výnosu. Použijeme-li metodu durace na konečné přírůstky, vzniká určitá chyba, která se s rostoucími přírůstky zvyšuje. Situace je patrná z *grafu č. 3.* Metoda durace nahrazuje křivkový průběh ceny dluhopisu v závislosti na výnosu přímkovým průběhem — tečnou ke křivce v bodě daném původním výnosem. Je patrné, že i velká změna ve výnosu do doby splatnosti s sebou nese vcelku malou relativní chybu, jestliže ke stanovení nové ceny dluhopisu použijeme metodu durace. Začlenění konvexity dává přesnější výsledek.

Obecný výpočet durace a konvexity

Výpočet durace a konvexity podle výše uvedených vztahů je možné uplatnit pouze jeden den v roce — v den, kdy do vypršení zbývá celý počet let. Jinak je nutné výše uvedené vztahy poněkud zobecnit. Postup výpočtu uvedeme na dluhopise z části „Kuponové dluhopisy v ČR" pro den 16. prosince 1994. Státní dluhopis s kuponovou mírou 9,25 % má splatnost 12. srpna 1999. Do prvního kuponu zbývá t_1 = (360 − 129)/360 = 0,6417 roku a výnos do splatnosti činí 8,106 %. Potom analogicky s předchozí částí platí:

$$P = \frac{925}{1{,}08106^{0{,}6417}} + \frac{925}{1{,}08106^{1{,}6417}} + \frac{925}{1{,}08106^{2{,}6417}} + \frac{925}{1{,}08106^{3{,}6417}} +$$

$$+ \frac{10\,925}{1{,}08106^{4{,}6417}} = 10\,751{,}59 \text{ Kč}$$

$$D\,.\,P = \frac{0{,}6417\,.\,925}{1{,}08106^{0{,}6417}} + \frac{1{,}6417\,.\,925}{1{,}08106^{1{,}6417}} + \frac{2{,}6417\,.\,925}{1{,}08106^{2{,}6417}} + \frac{3{,}6417\,.\,925}{1{,}08106^{3{,}6417}} +$$

$$+ \frac{4{,}6417\,.\,10\,925}{1{,}08106^{4{,}6417}} = 41\,742{,}3$$

$$D = \frac{41\,742{,}3}{10\,751{,}59} = 3{,}8824 \text{ let}$$

$$K(1+r)^2 = \frac{0{,}6417 \,.\, 1{,}6417 \,.\, 925}{1{,}08106^{0{,}6417}} + \frac{1{,}6417 \,.\, 2{,}6417 \,.\, 925}{1{,}08106^{1{,}6417}} + \frac{2{,}6417 \,.\, 3{,}6417 \,.\, 925}{1{,}08106^{2{,}6417}} +$$

$$+ \frac{3{,}6417 \,.\, 4{,}6417 \,.\, 925}{1{,}08106^{3{,}6417}} + \frac{4{,}6417 \,.\, 5{,}6417 \,.\, 10\,925}{1{,}08106^{4{,}6417}} = 222\,716{,}8$$

$$K = \frac{222\,716{,}8}{1{,}08106^2} = 190\,569{,}5$$

Nechť se výnos do splatnosti sníží z 8,106 % na 7,106 %. Potom dosazením nového výnosu do vztahu pro cenu dluhopisu obdržíme novou cenu dluhopisu 11 147,44 Kč.

Výpočet můžeme provést také pomocí durace a konvexity. Při výpočtu metodou durace pro změnu ceny platí:

$$dP = -\,3{,}8824 \frac{-\,0{,}01}{1 + 0{,}08106}\, 10\,751{,}59 \text{ Kč} = 386{,}12 \text{ Kč}$$

Nová cena dluhopisu bude rovna staré ceně plus změna podle rovnice (9):

$$\textit{nová cena} = 10\,751{,}59 \text{ Kč} + 386{,}12 \text{ Kč} = 11\,137{,}71 \text{ Kč}$$

Uvažujeme-li také konvexitu, potom pro změnu ceny dluhopisu dP platí:

$$dP = -\,3{,}8824 \frac{-\,0{,}01}{1 + 0{,}08106}\, 10\,751{,}59 + \frac{1}{2}\, 190\,569{,}5(-\,0{,}01)^2 = 386{,}12 +$$

$$+\,9{,}53 = 395{,}65 \text{ Kč}$$

Nová cena dluhopisu bude rovna staré ceně plus změna podle rovnice (9):

$$\textit{nová cena} = 10\,751{,}59 \text{ Kč} + 395{,}65 \text{ Kč} = 11\,147{,}24 \text{ Kč}$$

Výpočet s durací obsahuje chybu 0,087 % a výpočet s durací a konvexitou chybu 0,002 %. I když použití durace i konvexity dává přesnější výsledky, v praxi se vzhledem k náročnosti výpočtů většinou spokojíme s durací.

Vliv kuponu na cenu dluhopisu

Podívejme se na zajímavou skutečnost u výnosu dluhopisů se stejnou dobou splatnosti a s různou kuponovou mírou. Vezměme například údaje podle „Wall Street Journal" platné pro 31. srpen 1994 o amerických dluhopisech s dobou splatnosti květen 1995. Z *tabulky č. 4* je patrné, že tyto dluhopisy nemají stejný výnos do splatnosti. Výnos do splatnosti je u dluhopisů s větším kuponem nižší.

Tento stav je důsledkem čtvrtého principu, podle kterého dluhopisy s menším kuponem mají větší procentní změnu ceny. Cena dluhopisu s kuponem $5^7/_8$ % při změně výnosu do splatnosti procentně tudíž kolísá více než u dluhopisu s kuponem $8^1/_2$. Podobné vztahy platí mezi dalšími dluhopisy uvedenými v tabulce č. 4. Protože investoři preferují méně citlivé dluhopisy, preferují tím dluhopisy s větším kuponem (s menší durací), v daném případě dluhopis s kuponem $12^5/_8$. Poptávka po dluhopisech s větším kuponem způsobuje vzestup jejich cen, a tudíž snížení výnosu. Za stavu rovnováhy nabídky a poptávky jsou investoři tedy ochotni investovat stejně do dluhopisu s nižším kuponem a větším výnosem do splatnosti jako do dluhopisu s větším kuponem a nižším výnosem do splatnosti.

TABULKA č. 4 Výnosy dluhopisů se stejnou dobou splatnosti a různou kuponovou mírou

dluhopis		výnos do splatnosti
$5^7/_8$	May 95n	5,28
$8^1/_2$	May 95n	5,24
$10^3/_8$	May 95	5,19
$11^1/_4$	May 95n	5,15
$12^5/_8$	May 95	4,93

Tento fakt způsobuje, že výnosová křivka pro jeden druh dluhopisů (např. státních) není ve skutečnosti křivkou, ale určitým pásem. Jedné době splatnosti totiž příslušejí různé hodnoty výnosu do doby splatnosti podle kuponové míry. Dluhopisy s větším kuponem jsou v dolní části pásu a dluhopisy s menším kuponem v horní části pásu.

Poznámka k duraci

Durace definovaná vztahem (6) se nazývá Macaulayho durace. Kromě takto definované durace se můžeme také setkat s poněkud jinými definicemi. Uvedeme dvě z nich. *Upravená durace* („modified duration") D_{mod} a *dolarová durace* („dollar duration") D_{dol} se odvozují z Macaulayho durace D a definují se vztahy:

$$D_{mod} = \frac{D}{1 + r}$$

$$D_{dol} = D_{mod} P = \frac{D P}{1 + r}$$

Potom lze vztah (9) pro změnu ceny dluhopisu rozšířit o další vyjádření:

$$\mathrm{d}P \approx - D \frac{P}{(1 + r)} \mathrm{d}r = D_{mod} P \mathrm{d}r = D_{dol} \mathrm{d}r$$

Závěr

Durace je pro investora velice užitečným nástrojem, protože poskytuje vhodný prostředek ke stanovení cenové citlivosti dluhopisu, tj. k určení závislosti ceny dluhopisu na třech základních parametrech — kuponové míře, době splatnosti a úrovni výnosu do splatnosti. Investoři mohou porovnat pohyb cen různých dluhopisů způsobených změnou výnosu do splatnosti jednoduše porovnáním jejich durací.

Durace také slouží k rychlému stanovení nové ceny dluhopisů způsobené změnou výnosu do splatnosti. I když takto stanovená cena není zcela přesná, pro malé změny výnosu do splatnosti většinou postačuje. Pro přesnější stanovení ceny je možné použít ještě konvexitu.

LITERATURA

BODIE, Z.—KANE, A.—MARCUS, A. J.: Investment. Homewood, Boston 1993.

CASEY, C.—LOISTL, O.—SCHNEIDER, C.: Computergestützte Finanzierungsentscheidungen. Service Verlag, Wien 1993.

DUBOFSKY, D. A.: Options and financial futures: valuation and uses. McGraw-Hill, New York 1992.

SHARPE, W. F.—ALEXANDER, G. J.: Investice. Victoria Publishing, Praha 1994.

SUMMARY

Bond Duration and Convexity

Josef JÍLEK, Banking Supervision, CNB Praha

The bond investor considers the net yield and other factors including price sensitivity which reflects bond price movement corresponding to the change of the yield. Most of the investors have risk aversion and thus prefer bonds with lower bond price sensitivity. Higher demand for such bonds shifts the prices higher and yields lower. Thus positive sloping yield curves occur more frequently than negative sloping yield curves. Bond price sensitivity can be quantified by duration. Duration can be also used for the calculation of the new bond price due to the change of yield. Such calculation can be more rigorous when both duration and convexity are used.

Duration can explain yields corresponding to different bond coupons. The higher the coupon the lower the duration and thus lower the yield. Different coupons are the reason why there is no single yield curve but a band of yield curves.

Duration is a very important concept for investors. It summarizes the influence of coupon, maturity and yield outstanding on bond price sensitivity. Investors include the concept of duration into their bond evaluation.