ročník 50, 2000, číslo 2

Finance a úvěr

Vydává Univerzita Karlova v Praze, Fakulta sociálních věd ve spolupráci s Českou národní bankou a Ministerstvem financí ČR prostřednictvím A.L.L. production, s.r.o., Praha

Published by Charles University, Prague, Faculty of Social Sciences, in cooperation with the Czech National Bank and the Ministry of Finance of the CR, through the A.L.L.production, Ltd., Prague

Časopis je dokumentován v Social Science Citation Index (http://www.isinet.com/) a v elektronické verzi indexu EconLit (http://www.econlit.org/).

The journal is monitored by the Social Science Citation Index (http://www.isinet.com/) and the electronic EconLit index (http://www.econlit.org/).

OBSAH

CONTENTS

Toto číslo předáno do sazby: 4. 1. 2000 Souhlas k tisku: 3. 2. 2000

Redakce prosí autory, aby při předávání příspěvků uváděli celé své jméno, adresu domů i na pracoviště, telefonní, faxové a e-mailové spojení. K příspěvku je nezbytné přiložit anglické resumé (o rozsahu maximálně 150 slov). Příspěvek by neměl přesáhnout 25 normovaných rukopisných stran, a to včetně grafů a tabulek. Pro elektronickou podobu prosíme požívejte program Word (až do verze 97).

Redakce předpokládá, že příspěvek nabízený k publikaci v tomto časopise je ***originální,*** *tedy že dosud nebyl nabídnut a bez souhlasu redakce ani nebude nabídnut k publikaci jiné redakci nebo jinému vydavateli. Pokud tomu tak není, prosíme o písemné sdělení této skutečnosti.*

DT: 519.86; 330.115; 336.764.2
klíčová slova: Blackův-Scholesův model – stochastický přístup

Blackův-Scholesův model oceňování opcí

Jiří SLAČÁLEK*

Úvod

Blackův-Scholesův model oceňování opcí (B-S-model) představuje spolu s modelem CAPM nebo APT jeden ze základních stavebních bloků moderní finanční teorie. Ačkoli vznikl již před 25 lety, přežil s mírnými modifikacemi až do současnosti a lze těžko předpokládat, že v několika příštích letech se někomu podaří vymyslet pro oceňování finančních derivátů nějaký lepší způsob.

Ačkoli tento model staví na často kritizovaných předpokladech, dává velmi uspokojivé empirické výsledky. Jeho hlavní výhodou je jednoduchost. Arbitrážní přístup k ohodnocování derivátů, který zavedli Fischer Black, Myron Scholes a Robert Merton, se ukázal být použitelný pro mnohem více finančních instrumentů než jen pro v té době neznámé a nevýznamné finanční opce. Od 70. let vzniklo mnoho modelů mezičasové a rizikové struktury úrokových měr, jež uspokojivě simulují ceny dluhopisů, a B-S-model se ukázal být snadno aplikovatelný i na tzv. reálné opce – investiční projekty firem.

Základní myšlenka B-S-modelu

B-S model je postaven na velice jednoduchém a o to obdivuhodnějším nápadu. Předpokládá se dokonalý (efektivní) trh, který žádnému účastníkovi nedovoluje, aby dosahoval neomezeného zisku. Tento trh neumožňuje *arbitráž*, tj. situaci, kdy je možné s nulovou počáteční investicí dosáhnout pomocí nějaké strategie kladného zisku v budoucnu. Nutnou podmínkou pro neexistenci arbitráže je, že finanční instrumenty, které mají shodné budoucí výnosy, musejí mít i stejnou cenu v současnosti. Autoři dále předpokládají, že je exogenně dán stochastický proces, jenž popisuje pohyb ceny *podkladové akcie*[1], jehož parametry, tj. střední hodnotu a rozptyl, znají všechny subjekty trhu. Dále existuje *bezrizikový dluhopis* (obligace), který má v nejjednodušší verzi modelu konstantní výnos. Pomocí těchto dvou instrumentů lze zkonstruovat portfolio, které dokonale kopíruje cenu opce, a musí tedy mít stejnou cenu jako opce. K tomu, aby toto portfolio existovalo, je však nutné ob-

---

* Jiří Slačálek – t.č. na doktorandském studiu na John Hopkins University, Baltimore
Autor by rád poděkoval J. Á. Víškovi a M. Vošvrdovi za cenné připomínky a opravy konečné verze tohoto článku. Tento článek obsahuje citace z diplomové práce (Slačálek, 1998).

[1] Všechny nové termíny jako podkladová akcie nebo uplatňovací cena jsou vysvětleny níže.

chodování ve spojitém čase. Je totiž třeba neustále upravovat podíly akcie a dluhopisu v tomto portfoliu. Musíme dále předpokládat, že tyto úpravy jsou bezplatné, tj. neexistují žádné transakční náklady spojené s nákupem a prodejem akcie a dluhopisu. Za těchto podmínek je pak možné vyjádřit cenu opce pomocí známé ceny podkladové akcie a bezrizikového dluhopisu.

K rigoróznímu odvození B-S-ceny opce je třeba poměrně složitých matematických nástrojů, tzv. stochastického diferenciálního počtu. Jeho zjednodušený výklad obsahuje zařazený *Dodatek*. Následující oddíly popisují předpoklady a závěry B-S-modelu.

Předpoklady Blackova-Scholesova modelu[2]

Nejprve vymezíme pojmy, se kterými budeme dále pracovat. *Evropskou kupní (call) opcí* rozumíme kontrakt, který dává svému majiteli právo – nikoli povinnost – koupit podkladové aktivum[3] v dané datum za předem určenou cenu (uplatňovací, realizační cenu). *Evropská prodejní (put) opce* opravňuje svého majitele k prodeji podkladového aktiva za uplatňovací cenu. *Americké prodejní a kupní opce* jsou obdobné jako evropské, avšak s tím rozdílem, že právo lze uplatnit i před daným datem.

Hodnotu (cenu) evropské kupní opce označíme $C(S,\tau)$, kde cena opce C je funkcí pouze současné ceny podkladového aktiva S a doby do vypršení opce (expirace)[4] τ. Označme dále bezrizikovou úrokovou míru r a uplatňovací cenu opce K. Podkladová akcie této opce nevyplácí žádné dividendy. Dále předpokládáme, že uplatňovací cena K je během „života" opce konstantní. Základní předpoklady modelu jsou:

(1) *Dokonalý trh* – Neexistují žádné transakční náklady ani diferenční daně. Obchodování se uskutečňuje ve spojitém čase, výpůjční a zápůjční úroková míra jsou si rovny, neexistuje žádné omezení na krátké prodeje a všechny cenné papíry jsou neomezeně dělitelné. Kapitálový trh je dokonale konkurenční, jednotliví investoři nemohou ovlivnit cenu akcie S ani bezrizikovou úrokovou míru r.

(2) *Dynamika ceny akcie* – Cena podkladové akcie S se řídí geometrickým Brownovým pohybem, který popisujeme stochastickou diferenciální rovnicí:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \qquad S(0) = S_0 > 0$$

neboli

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t) \qquad S(0) = S_0 > 0 \tag{1}$$

kde α, $\sigma \in \mathbf{R}^+_0$. Parametr α lze chápat jako střední hodnotu výnosu akcie, σ^2 jako jeho rozptyl, dW je infinitezimální přírůstek standardního Wiene-

---

[2] Původní odvození tohoto modelu obsahuje (Black – Scholes, 1973); tento text vychází z poněkud přesnější a obecnější verze (Merton, 1973).

[3] V našem případě bude podkladové aktivum akcie; jeho cenu označíme S.

[4] Doba do vypršení opce τ je tedy doba mezi současným časovým okamžikem t a okamžikem T, kdy bude evropská opce uplatněna nebo vyprší a bude bezcenná: $\tau = T - t$. S postupem času $\tau \uparrow T$ a τ tedy klesá. V okamžiku vypršení $t = T$ a $\tau = 0$ vyplácí evropská kupní opce částku $S(T) - K$, pokud $S(T) > K$, nebo částku nulovou, pokud $S(T) \leq K$. V době vypršení má kupní opce cenu: $C(S, 0) = \max\,[S(T) - K, 0]$.

rova procesu (viz zde *Dodatek*). Cena akcie podle tohoto modelu nemůže nikdy dosáhnout záporných hodnot.

(3) *Dynamika ceny dluhopisu* – Cenu bezrizikového dluhopisu označíme jako $B(\tau)$, kde τ je doba splatnosti dluhopisu. Uvažujeme dluhopis, který má stejnou dobu splatnosti, jako je doba vypršení opce. Předpokládáme, že bezriziková úroková r míra je konstantní,[5] a navíc cenu dluhopisu v době splatnosti $\tau = 0$ normalizujeme na $B(0) = 1$. Cenu dluhopisu popisuje tedy následující diferenciální rovnice:

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} = -\frac{dB(\tau)}{dt} = -rdt \qquad B(0) = 1 \tag{2}$$

kde $r \in \boldsymbol{R}^{+}$[6].

(4) *Preference agentů a očekávání* – Předpokládáme pouze, že podkladová akcie i dluhopis jsou správně oceněny. Arbitrážní přístup, který B-S-model využívá, neklade téměř žádné požadavky na preference subjektů (není nutné požadovat ani averzi k riziku). Prakticky jediným požadavkem je, aby preference byly nenasycené, tj. aby subjekty preferovaly „více před méně". Všichni investoři se musejí shodnout na parametru σ a rozdělení přírůstků dW. Nemusejí se nutně shodovat na hodnotě α.[7]

Jádro Blackova-Scholesova modelu

Jak jsme již výše naznačili, předpokládáme, že cena kupní opce $C(S, \tau)$ je dostatečně hladkou funkcí ceny podkladové akcie S a doby do vypršení τ. Na funkci $C(.)$ aplikujeme Itoovo lemma:

$$dC = C_S dS + C_\tau d\tau + \frac{1}{2} C_{SS}(dS)^2$$

kde dolní indexy opět označují parciální derivace. Po dosazení za dS z (1) dostaneme:

$$dC = \beta C dt + \gamma C dW \tag{3}$$

kde jsme označili:

$$\beta \equiv \frac{1}{C} \left| \alpha S C_S - C_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} \right| \quad \text{a} \quad \gamma = \frac{\sigma S C_S}{C} \tag{4}$$

Užili jsme také rovnost $d\tau = -dt$, která vyplyne po zderivování vztahu $\tau = T - t$ podle t.

[5] Tento předpoklad není samozřejmě příliš reálný, ale opce jsou většinou krátkodobé instrumenty s vypršením zhruba do tří měsíců a během takto krátkého období se bezriziková úroková míra skutečně příliš nemění. Navíc B-S-model lze poměrně snadno zobecnit a cenu dluhopisu vyjádřit jako geometrický Brownův pohyb tak, jak to popisuje Merton (1973). Pro naše potřeby to však nebude nutné.

[6] Řešením rovnice (2) je samozřejmě $B(\tau) = \exp[-r\tau]$.

[7] Merton (1973, s. 164) poznamenává, že tento předpoklad není příliš restriktivní. Investoři se nemusejí shodovat na očekávaném výnosu, ale pouze na varianci σ^2, kterou analytici počítají většinou stejným způsobem ze shodných minulých dat. Na to lze namítnout, že k výpočtu odhadu variance musíme znát i střední hodnotu α. Lze však ukázat, že i poměrně velké rozdíly v odhadu α dávají odhady σ^2, které se liší velmi málo.

Nyní vytvoříme bezrizikové portfolio z opce, akcie a obligace tak, aby celková investovaná částka byla nulová.[8] Označme W_1 počet dolarů investovaných do akcie, W_2 počet dolarů investovaných do opce a W_3 počet dolarů investovaných do dluhopisů. Protože nebudeme potřebovat žádné peníze jako počáteční investici, platí $W_1+W_2+W_3 = 0$, tj.:

$$W_3 = -(W_1+W_2) \tag{5}$$

Celkový výnos z portfolia, který označíme Y, se rovná váženému průměru výnosů jeho složek. Po dosazení z (1), (2), (3) a (5) máme:

$$dY = W_1\frac{dS}{S} + W_2\frac{dC}{C} + W_3\frac{dB}{B} = [W_1(\alpha - r) + W_2(\beta - r)]\,dt + [W_1\sigma + W_2\gamma]dW$$

Předpokládejme, že lze eliminovat šum dW, čímž bychom dosáhli bezrizikového výnosu. Abychom vyloučili arbitráž, musí mít portfolio Y (protože vyžadovalo nulovou investici) nulový výnos. Dostaneme tedy následující nutné podmínky:

$$(\alpha - r)W_1^* + (\beta - r)W_2 = 0 \tag{6}$$

$$\sigma W_1^* + \gamma W_2^* = 0 \tag{7}$$

kde W_1^* a W_2^* jsou konkrétní množství akcií a opcí v bezrizikovém portfoliu. Tato soustava má netriviální řešení pouze tehdy, když:

$$\frac{\beta - r}{\alpha - r} = \frac{\gamma}{\sigma} \quad \text{nebo} \quad \frac{\beta - r}{\gamma} = \frac{\alpha - r}{\sigma} \tag{8}$$

Tato rovnost říká, že cena rizika, podíl rizikové prémie a množství rizika jsou pro obě aktiva (akcii i opci) stejné.[9] Vztah (8) přepíšeme jako $\beta - r = \gamma(\alpha - r)/\sigma$, což po dosazení ze (6) a (7) implikuje následující rovnici:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - C_t - rC = 0 \tag{9}$$

Toto je lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu parabolického typu s okrajovými podmínkami:

$$C(0, \tau) = 0 \tag{10}$$

$$C(S, 0) = \max\,[0, S - K] \qquad (11)^{10}$$

[8] To znamená, že například prodáme akcii na krátko a částku, kterou za ni dostaneme, budeme investovat do opce a dluhopisu.

[9] Tento je závěr velice podobný modelu CAPM, který shrnuje následující rovnice:

$$r_i = r + \beta(r_M - r) \tag{\#}$$

kde r_i je výnos i-tého aktiva, r bezriziková úroková sazba, r_M výnos tržního portfolia a $\beta = \sigma_{iM}/\sigma_M^2$ podíl kovariance i-tého aktiva a trhu σ_{iM} a rozptylu trhu σ_M^2. Vztah (#) lze snadno upravit na:

$$(r_i - r)/\sigma_i = \rho_{iM}(r_M - r)/\sigma_M \tag{\#\#}$$

kde ρ_{iM} je korelace i-tého aktiva a trhu. B-S-model považuje za i-té aktivum opci a za trh akcii. Během krátkého časového intervalu je navíc $\rho_{iM} = 1$. Za těchto podmínek je vztah (##) stejný jako rovnice (8).

[10] Navíc bychom ještě měli přidat podmínku, že funkce $C(\cdot)$ je omezená.

Rovnost (10) vyjadřuje, že pokud je bezcenná akcie, nemůže mít cenu ani opce, (11) říká, že v době vypršení „vyplácí" opce kladnou část rozdílu ceny akcie a uplatňovací ceny. Parciální diferenciální rovnice jsou obecně analyticky velice obtížně řešitelné; většinou je musíme řešit pomocí přibližných numerických metod. Rovnice (9) je naštěstí výjimkou. Tuto rovnici lze pomocí substituce převést na rovnici vedení tepla: $F_{kk}(k,l)=F_l(k,l)$, kterou lze řešit pomocí standardních metod.[11] Řešením této rovnice je slavný Blackův-Scholesův vzorec:

$$C(S, r, \tau, K) = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r\tau} \cdot N(d_2) \qquad N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} \exp(-x^2/2)dx \qquad (12a)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2)\,\tau/2}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \qquad d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2)\,\tau/2}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \qquad (12b)^{12}$$

kde $N(d)$ je kvantil standardního normálního rozdělení.

Jedním z kouzel B-S-modelu je jeho poměrně snadná řešitelnost. Jak jsme již výše zmínili, je to velice řídký případ, kdy můžeme řešení parciální diferenciální rovnice zapsat v uzavřené formě, tj. pomocí elementárních funkcí, bez použití numerických metod. Toho jsme dosáhli díky tomu, že jsme požadovali, aby se hodnoty akcie řídily geometrickým Brownovým pohybem, tedy velice jednoduchým procesem. Pokud bychom předpokládali realističtější procesy, jak uvádí např. (Vasicek, 1977) nebo (Cox – Ingersoll – Ross, 1985), Blackova-Scholesova-Mertonova rovnice (16) by se už tak snadno explicitně vyřešit nedala.

Jak říká Merton (1976, s. 135), síla a krása B-S-modelu pramení z toho, *že nemusíme znát očekávaný výnos akcie ani opce,* abychom mohli spočítat hodnotu opce. Cenu opce lze tedy spočítat pomocí poměrně snadno měřitelných veličin. Tato přednost je důsledkem arbitrážního odvození B-S-modelu bez explicitního zahrnutí preferencí agentů. Subjekty se totiž zabývají pouze změnou relativních cen jednotlivých aktiv, nikoli jejich očekávanými výnosy.

Hlavním rysem B-S-modelu je fakt, že lze opci dokonale replikovat pomocí zbylých dvou aktiv – akcie a dluhopisu. To však stojí a padá s předpokladem neexistence transakčních nákladů. Pokud by totiž existovaly, nebylo by možné bezplatně kontinuálně přizpůsobovat váhy jednotlivých aktiv v základním portfoliu Y. Při existenci transakčních nákladů tedy B-S-model vyžaduje poměrně značné úpravy, které provedl např. Leland (1985).

[11] Tyto metody zahrnují řešení pomocí separace proměnných nebo Fourierovy transformace. Blíže (Barták a kol., 1988).

[12] Striktně vzato, tento vzorec platí pouze pro evropské kupní opce, lze však ukázat (Merton, 1973), že pokud podkladová akcie nevyplácí dividendy, je cena americké kupní opce stejná jako cena evropské kupní opce se stejnými parametry. Navíc existuje put/call parita – parita prodej/koupě – pro evropské opce, která říká:

$$P(S, \tau) = C(S, \tau) - S + K\exp(-r\,\tau)$$

kde $P(.)$ je cena evropské prodejní opce. Dosazením tohoto vztahu do (19 a, b) a užitím symetrie normálního rozdělení dostaneme vzorec pro cenu prodejní opce:

$$P(S, \tau) = K[1 - \exp(r\,\tau)]\,N(d_1) - SN(d_2)$$

Některá zobecnění

Během 25 let existence B-S-modelu byl samozřejmě tento model různými autory značně rozšířen. Několik úprav, které dovolují uvolnit některé restriktivní předpoklady, jsme již výše zmínili. V tomto oddíle uvedeme ještě některá další zobecnění.

Existuje několik způsobů, jak původní B-S-model rozšířit. Jednak se lze zaměřit na předpoklad dokonalého, efektivního trhu – v tomto směru se vydal třeba Leland (1985), který upravil argument využívající dokonalé zajištění (dynamický hedging). V přítomnosti transakčních nákladů nelze opci dokonale replikovat pomocí akcie a dluhopisu. Abychom minimalizovali tyto náklady, upravujeme portfolio pouze v diskrétních časových intervalech, a proto není samozřejmě úplně bezrizikové.

Další možností je zobecnit stochastický proces popisující cenu akcie či zavést ještě další stochastický proces, který zachycuje cenu obligace.[13] Při popisu ceny akcie lze jednak zvolit jiné (složitější) parametry $a(z, t)$ a $b(z, t)$ Itoova procesu, jednak zavést ještě tzv. skokový proces, jenž popisuje nespojité (diskrétní) změny v ceně akcie. Ty samozřejmě mohou být reakcí trhu na neočekávanou mimořádně dobrou či špatnou zprávu o dané firmě. Toto zobecnění provedl Merton (1976).

Naopak velice mírných předpokladů na preference využili J. Cox a S. Ross (1976) k alternativnímu ekonomickému odvození B-S-vzorce. Z elementární teorie financí je známo, že cenu aktiva lze vyjádřit jako očekávanou (střední) hodnotu diskontovaných budoucích výnosů. Toto tvrzení platí obecně, a proto je ho možné aplikovat i na (evropské) opce. Víme totiž, že evropská kupní opce vyplácí v době svého vypršení hodnotu max $[S(T) - K, 0]$. Cena této opce v čase t by tedy měla být rovna $C(S,\tau)=\boldsymbol{E}[\exp(-\mu\tau).\max[S(T)-K, 0]]$, kde μ je výnos běžný pro aktiva se stejnou rizikovostí, jako má opce (očekávaný výnos opce). Jak jsme již ale v předpokladu (4) zmínili, arbitrážní oceňování nebere v úvahu rizikové preference. B-S-model byl odvozen bez jakýchkoli předpokladů na užitkové funkce investorů; předpokládalo se pouze, že subjekty nejsou „nasyceny". Nikde jsme nepotřebovali konkávnost užitkové funkce, tedy ani averzi k riziku. Jak píší Cox a Ross (1976, s. 153): „Hodnota opce [...] nezávisí přímo na struktuře preferencí investorů. Preference investorů [...] vstupují do oceňovacího problému pouze tak, že určují rovnovážné hodnoty parametrů. Každé preference, které určují stejné hodnoty relevantních parametrů, budou také oceňovat shodně opci bez ohledu na ostatní vlastnosti těchto preferencí. V Blackově-Scholesově případě rovnice (III.29) nezávisí na očekávaném výnosu akcie μ a jediné relevantní parametry oceňovacího problému jsou r a σ."

Aby neexistovala arbitráž, musí cena opce nutně splňovat B-S-vzorec. Cena opce se musí rovnat B-S-ceně v jakémkoli modelu se spojitým obchodováním a Itoovým procesem modelujícím cenu akcie. B-S-cena opce se tedy musí rovnat rovnovážné ceně opce i v případě, že všichni investoři jsou rizikově neutrální a mají lineární užitkové funkce. Tyto preference jsou samozřejmě konzistentní s hodnotami r a σ.

V případě rizikově neutrálních preferencí mají všechny cenné papíry bez-

[13] Bezriziková úroková míra se pak samozřejmě pohybuje náhodně. Toto zobecnění provedl Merton (1973).

rizikový výnos, jinak by nutně existovala možnost arbitráže. Pro akcii S lze tedy psát:

$$\boldsymbol{E}\,\{S(T)/S(t)\,|\,I(t)\} = e^{r(T-t)} \tag{13}$$

kde $\boldsymbol{E}\,\{\,.\,|\,I(t)\}$ je střední hodnota podmíněná informací v čase t. Pro evropskou kupní opci tedy můžeme nahradit očekávaný výnos bezrizikovou úrokovou mírou r a psát:

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)}\boldsymbol{E}\,\{\max\,[S(T)-K,0]\,|\,I(t)\} = e^{-r(T-t)}\int \max\,[S(T)-K,0]\,dF[S(T)\,|\,I(t)] \tag{14}$$

kde jsme využili definice střední hodnoty a $F[S(T)\,|\,I(t)]$ je distribuční funkce budoucí ceny akcie $S(T)$, pokud známe informace času t.[14] Z rovnice (14) tedy plyne, že pokud známe distribuční funkci ceny akcie, můžeme určit cenu opce. Problém správného ocenění opcí se tedy vlastně redukuje na zadání stochastického procesu, kterým se řídí cena podkladové akcie, a vypočtení střední hodnoty.

Na závěr tohoto oddílu je ještě vhodné krátce se zmínit o některých aplikacích B-S-modelu na finanční a reálná aktiva, která nemají na první pohled s opcemi mnoho společného.

Jak ukazuje Black (1995), lze se na nominální úrokové míry dívat jako na americkou kupní opci. Pokud totiž klesne nominální úroková míra na záporné hodnoty, ztratí subjekty zájem investovat do dluhopisů a budou raději držet hotovost, která má nulovou nominální úrokovou míru.

Velice důležité použití B-S-modelu ukazuje Merton (1974), který aplikuje B-S-model na oceňovaní rizikových dluhopisů s nulovým kuponem. Uvažujme firmu, která má hodnotu $V(t)$, jež se rovná součtu hodnoty akcií $f(V,t)$ a rizikových obligací (dluhu) $F(V,t)$ s nominální hodnotou D emitovaných firmou.

$$V(t) = f(V,t) + F(V,t) \tag{15}$$

Hodnota obligací v době splatnosti je:

$$F(V,t) = \min\,[D, V(T)] \tag{16}$$

Pokud je hodnota firmy nižší než nominální hodnota obligací, firma prakticky přechází do vlastnictví držitelů obligací, kteří však samozřejmě nedostanou celou částku D, ale jen $V(T)$. Vztah (16) lze upravit následujícím způsobem:

$$F(V,T) = D - \max\,[D - V(T), 0] \tag{17}$$

Druhý výraz na pravé straně je hodnota prodejní opce s uplatňovací cenou D. Hodnota rizikových obligací je tedy rovna:

$$F(V,t) = De^{-r(T-t)} - P\,[V(t), T-t; D] \tag{18}$$

kde $P[V(t), T\text{-}t, D]$ je hodnota evropské prodejní opce s uplatňovací cenou D.

---

[14] Je třeba dát pozor na to, že pomocí vzorce (14) odvodíme správnou cenu opce, ale v žádném případě z něj neplyne, že má opce ve skutečnosti bezrizikový výnos.

Alternativně platí:

$$F(V, T) = V(T) - \max\,[V(T) - D, 0]$$
$$f(V, T) = \max\,[0, V(T) - D]$$
$$f(V, t) = C[V(t), T - t; D] \qquad (19)$$

Akcii zadlužené firmy lze tedy chápat jako kupní opci. Její majitel má volbu: buď dluhopisy splatit a firmu vlastnit dál, nebo dluhopisy nesplatit a firma přejde do vlastnictví držitelů dluhopisů.

Dixit a Pindyck (1994) ukazují, že B-S-model lze využít k oceňování tzv. reálných opcí, reálných investičních projektů. Klasická teorie investic říká, že firmy investují do daného investičního projektu (např. nového výrobního závodu), pokud je jeho čistá současná hodnota (NPV) kladná. Tento přístup však předpokládá, že investiční rozhodnutí je vratné, že tedy firmy mohou za neočekávaně nepříznivých podmínek projekt zastavit a hlavně z něj dostat zpět investované peníze. Tak tomu ale v realitě většinou není. Investiční rozhodnutí jsou do značné míry *nevratná* (firmy čelí značným zapuštěným nákladům); ale navíc zde existuje *možnost odložit* dané rozhodnutí. Firma si tedy může vybrat: buď investovat hned, nebo vyčkat určitou dobu, jak se bude ekonomické prostředí vyvíjet, a rozhodnout o případné investici až za nějaký čas. Firma má americkou opci: může ji uplatnit hned (tj. investovat) nebo vyčkat a pak se rozhodnout. Právě hodnotu této opce je nutné vzít do úvahy při investičním rozhodování. Hlavním závěrem této teorie je, že pro to, aby firmy investovaly, bude muset být NPV *výrazně* kladná, a aby zrušily daný projekt, bude muset být výrazně záporná. Tato teorie tedy předpovídá více setrvačnosti (hystereze) v investičním rozhodování než klasická NPV teorie investic.

Empirický test Blackova-Scholesova modelu[15]

V tomto oddíle se pokusíme na některých vhodných aktivech ověřit, zda se hodnota opcí na ně vypsaných řídí B-S-vzorcem. Jak uvidíme, je třeba být velice opatrný při výběru podkladových akcií či indexů, protože ne všechna aktiva splňují předpoklady základního modelu a uspokojivé výsledky je možné očekávat jen za určitých výše uvedených podmínek.

K výpočtu teoretické B-S-ceny opce je třeba zjistit pět veličin: současnou cenu podkladového aktiva S, uplatňovací cenu opce K, dobu vypršení τ, bezrizikovou úrokovou míru r a rozptyl výnosu podkladového aktiva σ^2. První dvě veličiny jsou dané a není nutné je nějak dále komentovat.

V našem testu budeme uvažovat opce obchodované na největší americké opční burze Chicago Board Options Exchange. Splatnost těchto opcí končí vždy v sobotu, která následuje těsně po třetím pátku v každém měsíci. Vypršení opce počítáme jako podíl počtu dnů do doby vypršení a počtu dnů v účetním roce (360), tj.: $\tau = n/360$, kde n je počet dnů do doby vypršení.

Co se týká bezrizikové úrokové míry, užijeme výnos amerických pokladničních poukázek (treasury bills), jejichž doba splatnosti je zhruba stejná jako doba vypršení uvažované opce. Předpokládali jsme konstantní bezri-

[15] Velmi dobrý návod, jak testovat B-S-model, obsahuje (Cox – Rubinstein, 1985, kap. 6).

zikovou úrokovou míru (jako F. Black a M. Scholes ve svém původním článku). Tu jsme spočítali jako aritmetický průměr sazby poptávky a nabídky na treasury bills.[16] K výpočtu B-S-ceny opce jsme použili modifikaci B-S-modelu pro diskrétní úročení. Postupovali jsme podle vzorce:

$$C(S, \tau) = S \cdot N(d) - K \cdot r^{-\tau} N(d - \sigma\sqrt{\tau}) \quad d = \frac{\ln(S \cdot r^{\tau}/K)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \tag{20}$$

kde C je cena opce, S současná cena podkladového aktiva, r bezriziková úroková míra, τ doba do vypršení opce, K uplatňovací cena opce, σ^2 rozptyl výnosu podkladového aktiva a $N(.)$ distribuční funkce standardního normálního rozdělení. Alternativně je možné počítat cenu opce podle klasického vzorce se spojitým úročením.[17] Tento způsob dává ale téměř shodné výsledky jako námi užitý postup (rozdíly v ceně opcí jsou menší než 5 %).

Největším problémem při našem testu je odhad rozptylu výnosu podkladového aktiva σ^2. Postupovali jsme následovně (podobně jako Cox a Rubinstein (1985)). Shromáždili jsme jednotlivá pozorování cen podkladových aktiv: $S_1, S_2, \ldots, S_T$ a pak jsme provedli transformaci:

$$\hat{S}_t \equiv \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = \ln S_t - \ln S_{t-1} \equiv \Delta \ln S_t, \qquad t = 2,3,\ldots,T \tag{21}$$

O veličině $\hat{S}_t$ předpokládá B-S-model, že je normálně rozdělená se střední hodnotou $\hat{\mu}$ (kterou my nebudeme pro naše účely odhadovat) a rozptylem $\hat{\sigma}$, který se snažíme zjistit. Pokud máme dostatečně mnoho pozorování (více než 50), je tento předpoklad možné ověřit například χ^2-testem dobré shody či Kolmogorovovým-Smirnovovým testem. Z posloupnosti transformovaných pozorování $\hat{S}_t$ se pak snažíme vypočítat odhad rozptylu výnosu $\overline{\text{var}}\ \hat{S}$ podle známého vztahu:

$$\overline{\text{var}}(\hat{S}) = \frac{1}{T-2} \sum_{t=2}^{T} (\hat{S}_t - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{T-2} \sum_{t=2}^{T} [\hat{S}^2_t - \hat{\mu}^2] \tag{22}$$

Toto je odhad rozptylu za období, mezi kterými byla zaznamenávána jednotlivá pozorování. To znamená, že pokud máme denní pozorování ceny dané akcie, bude $\overline{\text{var}}(\hat{S})$ odhad *denního* rozptylu výnosu této akcie. Posledním krokem bude převedení tohoto rozptylu na roční bázi. Z definice Wienerova procesu plyne, že jeho rozptyl na intervalu $[s, t]$ je dán jako $\sigma^2(t-s)$. Pokud tedy máme denní pozorování, musíme odhad $\overline{\text{var}}(\hat{S})$ vynásobit počtem dnů v roce. Tak dostaneme odhad rozptylu σ^2 ze vzorce (20). Ukážeme nyní tento postup na praktických příkladech.

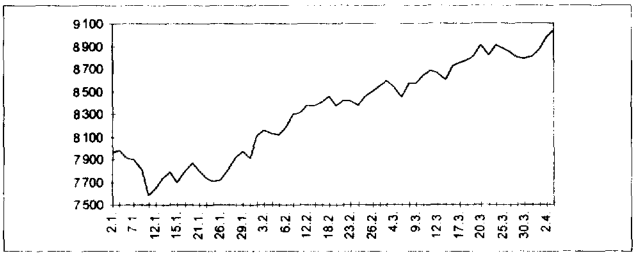
Jako příklad jsme zvolili index *Dow Jones Industrial Average* (DJIA), který měří celkový pohyb cen akcií na New York Stock Exchange. Na jeho hodnotu – na rozdíl od akcií – mají dividendy zanedbatelný vliv. Zaznamenali jsme denní pozorování za období 2.ledna – 6.dubna 1998 (celkem 62 pozorování).

Po transformaci dat pomocí vzorce (22) jsme provedli χ^2-test dobré shody

[16] Veškerá data v této kapitole jsou převzata z *The Wall Street Journal Europe*.

[17] Pak je ovšem nutné upravit sazbu T-bills z novin na ekvivalentní sazbu při spojitém úročení.

GRAF 1 Index Dow Jones Industrial Average



a Kolmogorovovův-Smirnovovův test. Ani jeden z testů nezamítl na 5% hladině významnosti hypotézu normality rozdělení výnosů indexu DJIA. Odhadli jsme denní rozptyl výnosu DJIA:

$$\overline{\text{var}}\,(\hat{S}) = 8{,}07805.10^{-5}$$

Rozptyl výnosu na roční bázi je tedy $\sigma^2 = 365.\ \overline{\text{var}}\,(\hat{S}) = 0{,}029485$.Výpočet rozptylu podkladového aktiva je nejobtížnější částí celé oceňovací procedury. Snažili jsme se ještě odhadnout rozptyl výnosů DJIA z různých podsouborů. Vybrali jsme 3 další podsoubory, které by při platnosti lognormálního rozdělení DJIA teoreticky měly dávat stejné odhady výnosů tohoto indexu. Soubor I je 24 pozorování za každé pondělí a čtvrtek (tj. dvakrát týdně) od 2.1. do 6. 4. 1998. Soubor II je první polovina pozorování ze základního souboru, tj. denní pozorování od 2. 1. do 18. 2. 1998. Soubor III je druhá polovina pozorování ze základního souboru, tj. denní pozorování od 19. 2. do 6. 4. 1998. Rozptyly jsme odhadli pomocí vzorce (29) a převedli na roční bázi (soubor $\overline{\text{var}}\,(\hat{S})$ ze souboru I byl samozřejmě přenásoben jiným číslem (3,5 · 52 = 182) než zbylé dva soubory (365)) – viz *tabulka 1.*

TABULKA 1 Odhady rozptylů výnosů DJIA

	odhad ročního rozptylu
soubor I	0,040942902
soubor II	0,041641041
soubor III	0,017414858
základní soubor	0,029485294

Jak je vidět, odhady jednotlivých rozptylů se značně liší; to může být způsobeno několika okolnostmi. Jednak nemusíme mít dostatečný počet pozorování a výše uvedené rozdíly jsou způsobeny nereprezentativností našich vzorků. Dále je možné, že pohyb indexu není spojitý, tj. že nastávají skoky, o kterých jsme se zmínili v oddíle věnovaném empirickému testu B-S-modelu. Je samozřejmé, že geometrický Brownův pohyb je pouze velmi jednoduchou aproximací reálných cen akcií. To, že rozptyl výnosů akcií nevyjde konstantní, se dalo očekávat. Existuje několik možností, jak náš model akcií „zreálnit".[18] Můžeme modifikovat stochastický proces popisující cenu ak-

[18] Tyto možnosti podrobněji popisují Musiela a Rutkowski (1998, s. 150–159).

TABULKA 2 Teoretické a empirické ceny opcí na index DJIA 6.4. 1998[19]

teoretické B-S-ceny					skutečné ceny opcí na DJIA (CBOE)				
uplatňo-	vypršení opce				uplatňo-	vypršení opce			
vací cena	duben	květen	červen	září	vací cena	duben	květen	červen	září
8200	850,67	888,89	930,15	1086,52	8200				
8400	652,35	794,77	753,84	927,93	8400	637,5	750	837,5	
8500	554,8	615,17	670,78	853,06	8500				
8600	459,84	531,38	591,88	781,4	8600	487,5	600		
8700	369,38	452,81	517,65	713,14	8700	375			
8800	285,87	380,26	448,55	648,4	8800	300	412,5	525	762,5
9000	149,56	255,77	327,07	529,93	9000	150	287,5	425	
9100	100,03	204,55	275,07	476,3	9100	87,5	243,5		
9200	63,12	160,72	228,92	426,43	9200	43,75	175	312,5	
9300	37,45	124,02	188,49	380,29	9300	18,75	137,5		
9400	20,84	93,94	153,53	337,8	9400	12,5	112,5		
9500	10,86	69,83	123,69	298,88	9500	6,25	75		
9600	5,29	50,93	98,55	263,41	9600				325

cie. Alternativně můžeme samotný rozptyl popsat nějakou stochastickou diferenciální rovnicí. Zajímavou možností je postupovat metodou tzv. implikované volatility (implied volatility). Ta navrhuje použít B-S-vzorec k výpočtu rozptylu. To je numericky možné, protože známe všechny potřebné veličiny včetně ceny opce. Takto bychom dostali řadu odhadů variancí, jejichž váženým průměrem by skutečný rozptyl mohl být.

Všechny výše zmíněné metody jsou však poměrně složité a časově náročné, a tak jsme zůstali u původního předpokladu geometrického Brownova pohybu ceny akcie. Za rozptyl budeme dosazovat hodnotu ze základního souboru, tj. 0,029485.[20]

Po dosazení potřebných údajů do vzorce (20) jsme dostali výsledky zachycené v *tabulce 2* – ta ukazuje teoretické ceny kupních opcí na index DJIA 6. dubna 1998.

Jak je vidět, některé výsledky jsou poměrně uspokojivé, jiné méně. Spolehlivost B-S-modelu klesá pro opce s delší dobou vypršení a pro opce, které jsou „deep in the money" nebo „deep out of the money", tj. ty, jejichž uplatňovací cena se významně odlišuje od současné hodnoty podkladového aktiva (uzavírací hodnota DJIA 6. dubna 1998 byla 9033,23 bodů). Opce s delší dobou vypršení jsou podceněné (některé velmi výrazně). Protože cena opce je rostoucí funkcí rozptylu, naznačovalo by to, že odhad rozptylu je podhodnocený.

Určitým vysvětlením by mohlo být i nezahrnutí skokového pohybu indexu do modelu. Jak ukazuje Merton (1976, s. 141-2), pokud zahrnuje skutečný pohyb podkladového aktiva skokovou složku, pak B-S-cena opce odvozená podle původního vzorce (neuvažujícího se skokovou složkou) bude vykazovat následující odchylky: Deep-in-the-money, deep-out-of-the-money opce a opce s kratší dobou vypršení se prodávají ve skutečnosti za vyšší cenu,

[19] Hodnota indexu DJIA 6.4. 1998 byla 9033,23 bodů. Bezrizikové úrokové míry jsou: duben: 5,43 %, květen 4,98 %, červen 4,95 %, červenec 4,95 % a září 5,04 %.

[20] Dixit a Pindyck (1994) odhadují roční rozptyl indexu DJIA na zhruba 0,04.

TABULKA 3 Výsledky regresního modelu

Regression Analysis – Linear model: $Y = a + bX$

Dependent variable: REGRESE. EMPR			Independent variable: REGRESE. TEOR		
Standard Parameter	T Estimate		Prob. Error	Value	Level
Intercept	6,68128		9,27043	0,720708	0,48088
Slope	1,00441		0,0277904	36,1423	0,00000
Analysis of Variance					
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	Prob. Level
Model	927631,59	1	927631,59	1306,3	0,00000
Residual	12072,359	17	710,139		
Correlation Coefficient = 0,993556			R-squared = 98,72 percent		
Stnd. Error of Est. = 26,6484			MAE = 19,869205		
R-squared (Adj. for d.f.) = 0,986397			Durbin-Watson statistic = 1,6653		

TABULKA 4 95% intervaly spolehlivosti

95 percent confidence intervals for coefficient estimates

	Estimate	Standard Error	Lower Limit	Upper Limit
CONSTANT	6,68128	9,27043	−12,8824	26,2450
REGR2.TEOR	1,00441	0,02779	0,94576	1,06306

než je B-S-cena, a naopak opce, jejichž uplatňovací cena je blízko ceny podkladového aktiva na trhu, a opce s delší dobou vypršení se prodávají za nižší cenu, než je jejich B-S-cena. Tento jev však z tabulky 2 jednoznačně vypozorovat nelze.

Vhodné by bylo se ještě zmínit alespoň o tom, jak nějakým způsobem formálně porovnat různost či stejnost skutečných a teoretických cen. Označme C_{teor} teoretickou cenu podle B-S-vzorce a C_{empir} skutečnou cenu opce na burze. Použijme následující test, založený vlastně na t-testech z klasické regrese. Teoretickou cenu můžeme chápat jako nějakou ideální hodnotu, kolem které se skutečně pozorované ceny pohybují. Budeme uvažovat následující regresní rovnici:

$$C_{empir} = C_{teor} + \varepsilon \qquad (23)$$

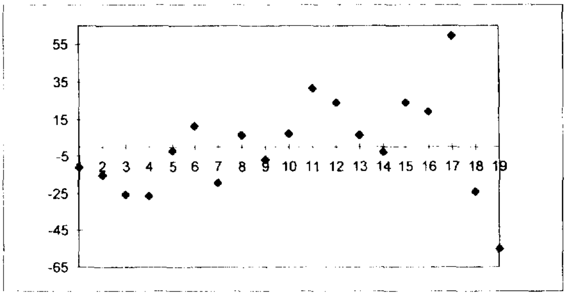
kde ε je normálně rozdělený bílý šum, $E\varepsilon = 0$, var $\varepsilon = \delta^2 = konst$ a cov $(\varepsilon_i, \varepsilon_\gamma) = 0$ pro $i \neq j$. Pokud tedy známe dostatečné množství teoretických a empirických cen, můžeme spočítat regresi:

$$C_{empir} = \beta_0 + \beta_1 C_{teor} + \varepsilon \qquad (24)$$

a testovat pomocí t-testů, zda se koeficienty β_0 a β_1 významně liší od 0, resp. 1.

Je třeba zdůraznit, že z několika důvodů má tato regrese pouze ilustrativní charakter. Problémem však je, které opce je ještě možné považovat za dostatečně podobné a zahrnout je do regrese. Počítali jsme s opcemi z tabulky 2 s vypršením v dubnu a květnu, což je celkem 19 pozorování. Výsledek regrese je shrnut v *tabulce 3* a *4*.

GRAF 2 Rezidua z regresního modelu



Jak je vidět, výsledky regrese jsou příznivé. Oba odhadnuté koeficienty jsou blízko hodnotám předpovídaným B-S-modelem. I výsledek Durbinova-Watsonova testu je v zásadě v pořádku. Určitým problémem by mohla být heteroskedasticita reziduí, která je patrná z *grafu 2*. Navíc je však nutné upozornit, že pokud bychom přidali i ostatní opce s delší splatností, výsledek by byl asi o něco horší. Uspokojivý výsledek naší regrese je tedy způsoben „vhodným" výběrem pozorování. Právě provedená regrese je poněkud „hrubým měřítkem", pozorování z tabulky 2, se kterými bychom asi na první pohled nebyli spokojeni, se v regresním modelu jeví jako poměrně správná.

Na tomto místě je třeba připomenout několik faktů. Při testování B-S-modelu je třeba dát pozor na vhodný výběr podkladové akcie. Původní B-S-model totiž předpokládá, že akcie nevyplácí dividendy. Navíc na NYSE dochází poměrně často k tzv. stock splits (štěpení akcií), kdy daná firma z různých důvodů (zvýšení likvidity, optimalizace daní) rozhodne, že vymění všem akcionářům jednu akcii za větší počet stejných akcií. Na efektivním trhu by neměl být problém novou cenu po této transakci snadno upravit, protože tak by se měla změnit pouze nepřímo úměrně s novým počtem akcií; v praxi to ovšem tak snadné není. Navíc je otázka, do jaké míry geometrický Brownův pohyb uspokojivě aproximuje pohyb podkladového aktiva. Jak plyne z tabulky 1, není vždy jednoduché rozhodnout, zda tomu tak je. Autorovi i čtenáři je asi jasné, že pro realistický popis cen akcií by bylo třeba zvolit nějaký složitější stochastický proces. K tomu bychom ale potřebovali mnohem větší počet pozorování, než se nám podařilo shromáždit.

Hlavním cílem tohoto oddílu bylo ukázat, že určení ceny opce, které se na první pohled jeví jako velice jednoduchá záležitost, má svá četná úskalí. Není možné pouze automaticky dosadit hodnoty do poměrně jednoduchého vzorce a očekávat, že dostaneme výsledek, který se na haléř shoduje s cenou, za kterou se opce obchoduje na burze. Čtenář si po přečtení předchozího textu může myslet, že B-S-model je pouze dalším z řady nefungujících, matematicky složitých a v praxi nepoužitelných modelů. Autor je názoru právě opačného. Nechce samozřejmě tvrdit, že by tento model byl dokonalý a bezchybný, je třeba si však uvědomit, že při předchozím testu nám největší potíže dělal odhad rozptylu akcie. Ten je ale samostatným problémem finanční ekonomie, zcela odděleným od B-S-modelu. Lze se tedy domnívat, že pokud bychom dokázali odhadnout správný rozptyl, nebyl by problém přesněji určit interval spolehlivosti pro cenu dané opce.

Shrnutí a závěr

Blackův-Scholesův model představuje patrně nejznámější aplikaci stochastického počtu v teorii financí. Tato práce se snažila nastínit základní principy tohoto matematického nástroje a naznačit důležitost arbitrážního přístupu k oceňování aktiv. Uvedli jsme poměrně podrobné odvození parciální diferenciální rovnice, kterou musí správně oceněná opce splňovat. Ukázali jsme, že B-S-model má velice široké uplatnění i mimo rámec finančních derivátů. Navíc lze tento model poměrně snadno upravit a zeslabit původní – v určitém ohledu velice striktní – předpoklady. Poslední část této práce obsahuje praktický návod, jak oceňovat finanční opce, i návrhy realističtějších modelů cen podkladového aktiva, které by mohly naše výsledky ještě značně zlepšit.

Můžeme jen doufat, že finanční deriváty budou co nejdříve zavedeny i na našem trhu, kde pak bude možné podrobněji ověřit i Blackův-Scholesův model.

Dodatek: Stochastický počet

Stochastický počet se používá ve finanční teorii k popisu nejistoty. V našem případě subjekty nemohou s jistotou určit budoucí cenu akcie, znají však pravděpodobnostní rozdělení budoucích hodnot této ceny. Původní B-S-model konkrétně předpokládá, že ceny akcií mají exponenciální trend, tj. výnosy akcií jsou v průměru konstantní. Protože však existuje nejistota, nesledují hladkou exponenciální křivku, ale určitým náhodným způsobem kolem ní oscilují – je v nich přítomna *náhodná (nesystematická) složka*. K modelování této náhodné složky je vhodný určitý stochastický proces, tzv. *Wienerův proces*.

(Standardní) Wienerův proces $\{W(t),\ t \geq 0\}$ je stochastický proces[21] splňující následující tři vlastnosti:

1. Trajektorie Wienerova procesu je spojitá, tj. během krátkého časového okamžiku se „příliš" nemění.
2. Přírůstky Wienerova procesu jsou normálně rozdělené s nulovou střední hodnotou a rozptylem, který roste přímo úměrně s délkou časové změny, tj.:

$$W(t_1)-W(t_0) \sim N\,(0,\ t_1-t_0) \text{ pro } t_0 \leq t_1$$

3. Přírůstky Wienerova procesu jsou nezávislé, tj.:

$$\boldsymbol{E}[W(t_1) - W(t_0)][W(t_3)-W(t_2)] = 0 \text{ pro } t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$$

kde $\boldsymbol{E}[.]$ označuje střední hodnotu.

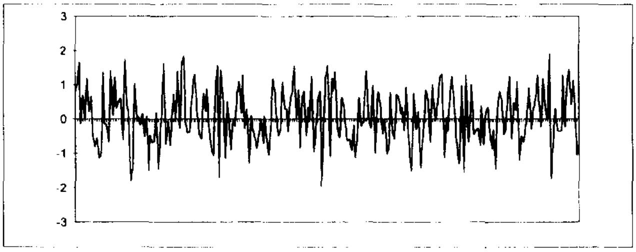
Dále pro jednoduchost předpokládáme, že Wienerův proces začíná v nule, tj. $W(0) = 0$. Z předchozí definice nemusí být zcela jasné, jak vlastně Wienerův proces vypadá. Jeho typickou trajektorii ukazuje *graf 3*.

Jak vidíme, přestože je tento proces spojitý, má velmi „divokou" trajektorii. Lze ukázat, že tato trajektorie není nikde hladká, tj. nemá v žádném bodě derivaci.

Intuitivně lze k Wienerovu procesu dospět z procesu náhodné procházky $\{v(t),\ t=0, 1, 2, \ldots\}$ v diskrétním čase, který vypadá následovně:

[21] Zhruba řečeno, stochastický proces je proměnná, která se mění v čase ne zcela předvídatelně.

GRAF 3 Trajektorie Wienerova procesu



$$v(t+1) = v(t) + \varepsilon_{t+1} \qquad v(0) = 0 \qquad \text{(I)}$$

kde ε_t je bílý šum, tj. posloupnost nezávislých náhodných veličin řídících se standardním normálním rozdělením $N(0, 1)$. Tento proces začíná v nule. Pokračujeme tak, že „vybereme" náhodně ε_1 a dostaneme se do bodu $v(1)$. Přidáme opět šum ε_2 a dostaneme se do $v(2)$.[22] Uvažujme následující zobecnění rovnice (I):

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \varepsilon_{t+\Delta t}\sqrt{\Delta t} \qquad v(0) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Pokud nyní necháme $\Delta t \to 0$, lze ukázat za použití centrální limitní věty, že proces $v(t)$ bude mít asymptoticky normální rozdělení s parametry zmíněnými v bodě 2 definice Wienerova procesu a navíc jeho trajektorie budou spojité. Vhodně zvolený proces náhodné procházky tedy konverguje k Wienerovu procesu (Cox – Miller, 1965).[23,24]

Již z grafu 3 je patrné, že Wienerův proces nelze považovat za dostatečně dobrý popis cen akcií. Ty totiž mají exponenciální trend a ani rozptyl jejich přírůstků není konstantní. Proto se v aplikacích používají různé modifikace standardního Wienerova procesu. Poměrně dobrým modelem, který si vybrali i F. Black a M. Scholes, je tzv. *geometrický Brownův pohyb,* zavedený původně P. Samuelsonem. Označme $S(t)$ cenu akcie v čase t. Pak výnos akcie v čase t je definován jako $dlnS(t) = dS(t)/S(t)$, kde $dS(t) = S(t+dt) - S(t)$ a dt je „velice malá" (infinitezimální) časová změna.[25] Geometrický Brownův pohyb popisuje následující *stochastická diferenciální rovnice*:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t) \qquad S(0) = S_0 \qquad \text{(III)}$$

kde $\alpha, \sigma \in \mathbf{R}^+_0$ a $dW(t)$ je velice malý (infinitezimální) přírůstek Wienerova procesu. $\alpha S(t)$ nazveme koeficientem *posunutí* a $\sigma S(t)$ koeficientem *difúze*. Rovnici (III) nelze psát v klasickém tvaru $S'(t)/S(t) = \alpha + \sigma W'(t)$, protože derivace Wienerova procesu podle času $dW(t)/dt$ neexistuje (téměř jistě).

Rovnici (III) lze interpretovat následovně. Předpokládejme nejprve, že $\sigma = 0$. Pak se (III) zjednoduší na:

---

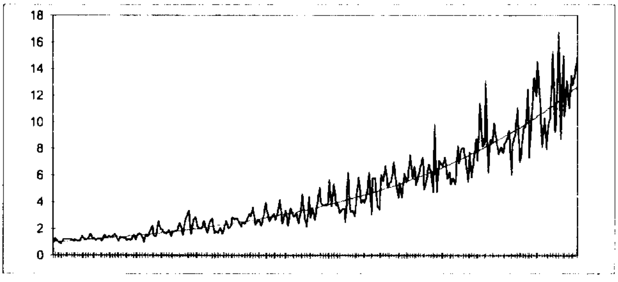
[22] Proces náhodné procházky tedy vlastně začíná v každém bodě znova, nezávisle na tom, jak se do něj dostal; můžeme proto říci, že splňuje *Markovovu vlastnost* (podobně jako samotný Wienerův proces).

[23] Všechny definice a tvrzení, která zde uvádíme, jsou značně zjednodušená. Např. v definici Wienerova procesu mluvíme o spojitosti všude, i když se jedná o spojitost téměř všude/s pravděpodobností 1; v tomto odstavci jsme nezmínili, o jaký druh konvergence náhodné procházky k Wienerovu procesu se jedná. Čtenář může najít rigorózní odvození našich tvrzení v citované literatuře.

[24] Lze tedy pro $\Delta t \to 0$ psát $dv(t) = \varepsilon_t(dt)^{1/2}$ a $dv(t)/(dt)^{1/2} \sim N(0, 1)$.

[25] Mlčky zde předpokládáme, že akcie nevyplácí dividendy.

GRAF 4 Trajektorie geometrického Brownova pohybu



$$\frac{dS(t)}{dt} = \alpha S(t) \qquad S(0) = S_0 \tag{IV}$$

což je obyčejná diferenciální rovnice, kterou lze snadno řešit:

$$S(t) = S_0 e^{\alpha t}$$

Tato rovnice popisuje trend cen akcií. Pokud $\sigma \neq 0$, pak (III) obsahuje ještě nenulový výraz $\sigma W(t)$, který zachycuje náhodnou složku v cenách akcií. Tato náhodná složka vyjadřuje fakt, že ceny akcií nesledují hladkou exponenciálu, nýbrž okolo ní náhodně fluktuují. Typickou trajektorii geometrického Brownova pohybu ukazuje *graf 4*.

Nyní by se mohlo zdát, že obecný případ $\sigma \in \mathbf{R}^+_0$ má obdobné řešení jako obyčejná diferenciální rovnice (IV), tj. $S(t) = S_0 \exp\,[\alpha t + \sigma W(t)]$. Tato domněnka ovšem není správná. (Itoův) stochastický počet se totiž řídí trochu jinými pravidly než klasický diferenciální počet.

Pilířem stochastického diferenciálního počtu je Itoovo lemma, které je obdobou klasického totálního diferenciálu. Pro dostatečně hladkou funkci $g(x, y)$ platí následující vztah (Taylorův rozvoj):

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!}\Big|g_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 +$$
$$+ 2g_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + g_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\Big| + R(x, y)$$

kde dolní indexy značí parciální derivace funkce g podle daných proměnných, tj. např. $g_{xy} = \partial g^2 / \partial x\, \partial y$ a $R(x, y)$ značí „zbytek", který se blíží „rychle" k nule.[26] Pro $x \to x_0$ a $y \to y_0$ dostaneme:

$$dg(x, y) = g_x(x, y)dx + g_y(x, y)dy + \frac{1}{2!}\Big|g_{xx}(x, y)dx^2 + 2g_{xy}(x, y)dxdy + g_{yy}(x, y)dy^2)\Big| + R(x, y)$$

Pokud v tomto vztahu zanedbáme členy 2. řádu, dostaneme rovnost pro klasický totální diferenciál:

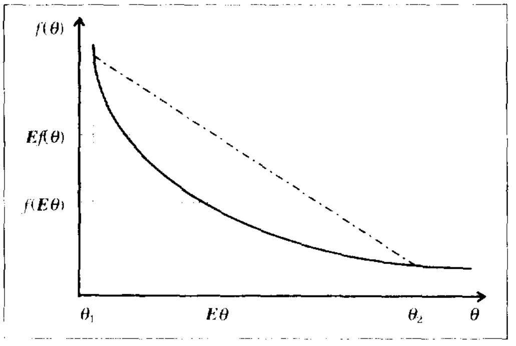
$$dg(x, y) = g_x(x, y)dx + g_y(x, y)dy$$

Až doposud jsme předpokládali, že x a y jsou *deterministické* proměnné. My však budeme níže potřebovat počítat i s funkcemi náhodných veličin. Jejich totální diferenciál však je, jak už jsme naznačili, poněkud odlišný.

Vyslovíme nyní tvrzení, které tento vztah popisuje – Itoovo lemma. Definujme nejprve tzv. Itoův proces jako stochastický proces $\{z(t), t \geq 0\}$, který lze popsat následující stochastickou diferenciální rovnicí:

[26] Platí $\lim_{x \to 0} R(x, y)/x^2 = \lim_{y \to 0} R(x, y)/y^2 = 0$.

GRAF 5 Jensenova nerovnost



$$dz(t) = a(z,\ t)\ dt + b(z,\ t)\ dW(t) \tag{V}$$

kde $a(.)$ a $b(.)$ jsou deterministické funkce splňující určité technické podmínky.[27]

Itoovo lemma: Mějme Itoův proces $\{z(t),\ t \geq 0\}$ a dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci $f(z,\ t)$. Pak pro diferenciál funkce f platí následující vztah:

$$df(z,t) = f_z(z,t)dz + f_t(z,t)dt + \frac{1}{2} f_{zz}(z,t)(dz)^2 = \left[f_z(z,t)a(z,\ t) + f_t(z,\ t) + \frac{1}{2} f_{zz}(z,t)b^2(z,t)\right]$$

$$dt + f_z(z,t)b(z,t)dW(t) \tag{VI}$$

Jak je vidět, stochastický totální diferenciál obsahuje o jeden výraz více než klasický – je to výraz $1/2\ f_{zz}b^2dt$. Ten se zde objevuje proto, že z definice je rozptyl Wienerova procesu přímo úměrný časové změně dt a navíc lze zjednodušeně psát $(dW(t))^2 = dt$.

Intuitivně lze Itoovo lemma chápat jako zobecnění Jensenovy nerovnosti. Ta říká, že konvexní funkce střední hodnoty náhodné proměnné je menší než střední hodnota konvexní funkce náhodné proměnné. Pro konvexní funkci $f(\theta)$ náhodné proměnné θ lze psát[28]:

$$f(\boldsymbol{E}(\theta)) \leq \boldsymbol{E}f(\theta) \tag{VII}$$

Tuto nerovnost ilustruje *graf 5*.[29]

Itoovo lemma předpokládá, že místo náhodné proměnné θ počítáme s Itoovým procesem $z(t)$. Pro nerovnost (VII) pak z (VI) dostaneme:

$$df(\boldsymbol{E}z) = f_z\ \boldsymbol{E}\ dz = f_z\ a(z)\ dt \leq \boldsymbol{E}\ df(z) = \boldsymbol{E}\ [f_z\ dz + 1/2\ f_{zz}(dz)^2] = [f_z a(z) + 1/2\ f_{zz}b^2(z)]dt \tag{VIII}$$

protože $\boldsymbol{E}dW = 0$ a $\boldsymbol{E}dW^2 = dt$. Nerovnost (VIII) platí samozřejmě pouze za předpokladu, že funkce f je konvexní, a tedy $f_{zz} > 0$.

Tímto výčtem jsme velice rychle shrnuli základní výsledky stochastického počtu. Jsme si vědomi toho, že jsme místy vynechali i podstatné detaily; jejich uvedení by však neúměrně prodloužilo text. Je třeba říci, že jsme se snažili postupovat přímo

[27] Konkrétně musí platit: $\int_0^t b^2(x,\ s)ds < \infty$ a $\int_0^t |a(x,\ s)|ds < \infty$ pro všechna $t \in \mathbf{R}^+$.

[28] Předpokládáme, že střední hodnoty $\boldsymbol{E}(\theta)$ a $\boldsymbol{E}f(\theta)$ existují.

[29] Uvažujeme pro jednoduchost případ, kdy θ nabývá pouze dvou hodnot: θ_1 a θ_2.

k Itoovu lemmatu, které je při odvození B-S-modelu nenahraditelné, a samotným stochastickým počtem jsme se zabývali jen velmi povrchně. Na tomto místě je vhodné uvést alespoň některé publikace, které jdou do větší hloubky. Jsou to jednak knihy zabývající se matematickou teorií financí, např. (Dothan, 1990), (Duffie, 1988) nebo (Malliaris – Brock, 1991), jednak knihy zaměřené na stochastický počet jako takový, např. (Friedman, 1975), (Karatzas – Shreve, 1988) nebo (Mandl, 1976).

LITERATURA

BARTÁK, J. – HERRMAN, L. – LOVINCAR, V. – VEJVODA, O. (1988): *Parciální diferenciální rovnice II – Evoluční rovnice.* Praha, SNTL, 1988.

BLACK, F. – SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy,* 81, 1973, pp. 637–654.

COX, D. R. – MILLER, H. D. (1965): *The Theory of Stochastic Processes.* London, Chapman & Hall, 1965.

COX, J. C. – INGERSOLL, J. E. – ROSS, S. A. (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica,* 53, 1985, pp. 385–408.

COX, J. C. – ROSS, S. A. (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics,* 3, 1976, pp.145–166.

COX, J. C. – RUBINSTEIN, M. (1985): *Options Markets.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1985.

DIXIT, A. – PINDYCK, R. S. (1994): *Investment Under Uncertainty.* Princeton, Princeton University Press, 1994.

DOTHAN, M. U. (1990): *Prices in Financial Markets.* New York, Oxford University Press, 1990.

DUFFIE, D. (1988): *Security Markets: Stochastic Models.* Boston, Academic Press, 1988.

FRIEDMAN, A. (1975): *Stochastic Differential Equations and Applications.* Volume I. New York, Academic Press, 1975.

KARATZAS, I. – SHREVE, S. E. (1988): *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Berlin, Springer-Verlag, 1988.

LELAND, H. (1985): Option Pricing and Replication with Transaction Costs. *Journal of Finance,* 1985, pp. 1283–1302.

MALLIARIS, A. G. – BROCK, W. A. (1991): *Stochastic Methods in Economics and Finance.* Amsterdam, North-Holland, 1991.

MANDL, P. (1976): *Stochastické integrály a jejich aplikace.* Praha, ÚTIA, 1976.

MERTON, R. C. (1990): *Continuous-Time Finance.* Oxford, Basil Blackwell, 1990.

MERTON, R. C. (1976): Option Pricing When the Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economic,* 5, 1976, pp. 125–144. (Lze najít i v (Merton, 1990)).

MERTON, R. C. (1973): The Theory of Rational Options Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science,* 4, 1973, pp. 449–470. (Lze najít i v (Merton, 1990)).

MUSIELA, M. – RUTKOWSKI, M. (1998): *Martingale Methods in Financial Modelling.* Berlin, Springer-Verlag, 1998.

SLAČÁLEK, J. (1998): *Black-Scholesův model oceňování opcí.* (Diplomová práce.) Praha, FSV UK, 1998.

VASICEK, O. (1977): An Equilibrium Characterisation of the Term Structure. *Journal of Financial Economics,* 5, 1977, pp. 177–188.

SUMMARY

JEL Classification: G12
Keywords: Black-Scholes model – stochastic approach

Black–Scholes Options Pricing Model

Jiří SLAČÁLEK – John Hopkins University, Baltimore

This paper deals with the most widespread model of options pricing, the Black-Scholes model. The model is derived in the usual way, by means of Ito's lemma. The Black-Scholes partial differential equation is obtained under the assumption of geometric Brownian motion of the underlying stock. Several useful generalizations, including a brief overview of risk-neutral pricing, are discussed. The last section contains an empirical test of this model using daily data from the Chicago Board Options Exchange. The appendix gives a thumbnail sketch of the fundamental results of stochastic differential calculus.