FINANCE A ÚVĚR **2/1995**
ročník 45

Vydává Ministerstvo financí České republiky ve spolupráci s Českou národní bankou ve vydavatelství Economia, a. s., Praha

Adresa redakce: Vinohradská 49
120 74 Praha 2
Tel.: (02) 253 018 nebo: (02) 24 21 00 25, l. 6141
Fax: (02) 253 728

Šéfredaktor: Ing. Ivan Kočárník, CSc.

FINANCE A ÚVĚR **2/1995**
Volume 45

Publishers: Ministry of Finance of the Czech Republic in Cooperation with Czech National Bank in Publishing House Economia, Prague

Editor's Office: Vinohradská 49
120 74 Prague 2
Czech Republic

Editor in Chief: Ivan Kočárník

OBSAH

Uprostřed čísla:
Quarterly Economic and Fiscal Bulletin of the CR, No 1

CONTENTS

In the middle of this issue:
Quarterly Economic and Fiscal Bulletin of the CR, No 1

Opakovaně upozorňuje všechny naše čtenáře na změnu v distribuci našeho časopisu: od 1. 1. 1995 převzala distribuci časopisu a. s. Economia. Prosíme Vás proto, abyste se se svými požadavky týkajícími se odběru časopisu obraceli buď na obchodní úsek a. s. Economia (tel. 02/282 23 13), nebo úsek předplatného (tel. 02/282 37 54, 282 22 16, 282 23 16; fax pro oba úseky: 02/24 21 49 27). Na Slovensku zajišťuje distribuci a. s. Ecopress, Pribinova 25, 810 11 Bratislava, tel.: 07/321 688, fax: 07/210 36 08.

Redakce

OPRAVA Prosíme čtenáře, aby omluvili chybu v článku Kinkor—Vašková „Analýza působení standardních..." v č. 1/95: pod správnými nadpisy jsou zde zaměněny graf 1 a graf 2. Děkujeme Vám.

Redakce

DT: 336.761; 311.141 (100.2:437)

Konstrukce burzovních indexů pomocí modelu oceňování kapitálových aktiv

Jaroslav BRADA*

1. část

Úvod

Každý majitel cenných papírů se zajímá o to, jak vysoké jsou tržní ceny aktiv a jak velká je „šance", že v budoucnu tržní ceny jeho aktiv vzrostou. Podobné problémy mají i institucionální investoři, jejichž portfolia zpravidla obsahují mnoho desítek až stovek různých typů cenných papírů; i ti se rovněž snaží zjistit, zda je „doba příznivě" nakloněna růstu tržních cen „většiny" aktiv v jejich portfoliu.

Základní orientaci při předpovídání budoucnosti poskytuje vývoj tzv. burzovních indexů (např. PX50); rostoucí řada burzovních indexů znamená, že „průměrné" tržní ceny cenných papírů rostou (podle optimistů díky rostoucí výkonnosti ekonomiky, podle pesimistů díky spekulačním očekáváním).

Pro „lepší odhad budoucnosti" si mnoho investičních fondů a investičních společností sestavuje svůj vlastní burzovní index a nespoléhá pouze na dosud existující burzovní indexy.

Standardním přístupem při sestavování burzovních indexů je využití vztahu $\sum_{i \in BI} TC_i \,.\, B_i$, kde B_i je objem i-tého cenného papíru, který se obchodoval na burze příslušný obchodní den (analogicky pro v RM-S), TC_i je tržní cena i-tého aktiva, BI je množina portfolia cenných papírů, které jsou základem pro výpočet burzovního indexu. Pak obvykle takto vzniklý index normujeme tak, že velikost konkrétního burzovního indexu k určitému datu prohlásíme za základ (o velikosti např. 100) a podle této hodnoty „upravíme" i velikost zmíněného burzovního indexu ve všech dnech. (Statisticky vzato nejde o nic jiného než o vyjádření burzovních indexů ve formě bazických indexů.)

Existují i trochu jiné možnosti, jak sestavovat burzovní index, ale základní princip uvedený v předchozím odstavci je vždy zachován — bez ohledu na to, zda jde o obyčejný součet typu „tržní cena krát obchodovaný objem", vážený součet, či dokonce o vážený geometrický průměr.

Další možností je využít při sestavování burzovních indexů model oceňování kapitálových aktiv.

V této práci si ukážeme, jak lze pomocí uvedeného modelu burzovní indexy sestavovat.

---

* Ing. Jaroslav Brada, katedra měnové teorie a politiky VŠE Praha

Příspěvek redakce obdržela 28. 11. 1994.

Než přistoupíme k vlastnímu vymezení toho, jaké vlastnosti by měl „ideální burzovní index" mít, musíme si nejprve objasnit konstrukci modelu oceňování kapitálových aktiv, tj. musíme zkoumat, jak se chová investor v procesu sestavování svého portfolia.

VÝZNAM MODELU OCEŇOVÁNÍ KAPITÁLOVÝCH AKTIV

Jako investoři — ať již na peněžním, nebo kapitálovém trhu — stojíme každý z nás tváří v tvář problému, kam investovat, abychom dosáhli co největšího výnosu a aby rizika, kterým jsme vystaveni, byla „rozumně veliká".

Na dalších stránkách si ukážeme, jak můžeme kvantifikovat nejen velikost výnosu, ale především „rizika". Proto budeme nejprve specifikovat a precizovat to, co rozumíme pod pojmem „výnos" a „riziko". Potom si ukážeme, jak vypadá tzv. tržní portfolio (toto si prozatím můžeme charakterizovat jako jakési „průměrné" portfolio „průměrného" investora). Na základě znalosti tohoto portfolia potom můžeme pomocí lineárního modelu důvěrně známého ze statistiky spočítat systematické riziko (= „riziko" trhu) a nesystematické riziko (= „riziko" jednotlivého finančního aktiva.).

Jak uvidíme, konstrukce libovolného burzovního indexu, který „dobře" charakterizuje „situaci" na trhu s cennými papíry, vyplyne již jako pouhý logický důsledek našich předchozích úvah.

Nakonec budeme postup konstrukce burzovních indexů demonstrovat na vybraných cenných papírech obchodovaných na kótovaném trhu Burzy cenných papírů Praha.

ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE PORTFOLIA, VÝNOS A „RIZIKO" FINANČNÍHO AKTIVA

V textu budou použity následující symboly:

TC_{it} — náhodná veličina popisující tržní cenu i-tého aktiva v časovém okamžiku t,

D_{it} — náhodná veličina popisující velikost vyplacené dividendy z i-tého finančního aktiva v časovém okamžiku t,

K — počet uplynulých období, k nimž chceme měřit přírůstek tržní ceny,

R_i — očekávaný výnos i-tého finančního aktiva, kde náhodná veličina Y_i je definována vztahem:

$$Y_i = \frac{TC_{it} - TC_{it-K} + D_{it}}{TC_{it-K}} \quad \text{pro všechna } t = 1, 2, \ldots, N$$

$$R_i = E(Y_i)$$

σ_i — tzv. riziko změny výnosu i-tého aktiva, kde

$$\sigma_i = \sqrt{var(Y_i)}$$

σ_{ij} — kovariance mezi výnosem i-tého a j-tého finančního aktiva, tj. $\sigma_{ij} = cov(Y_i, Y_j)$

Pochopitelně platí $\sigma_{ii} = (\sigma_i)^2$.

Pro praktické účely přirozeně nahrazujeme teoreticky vyjádřené charakteristiky náhodné veličiny popisující výnos i-tého finančního aktiva jejich odhadem (tj. v případě očekávaného výnosu použijeme výběrový průměr, zatímco v případě rizika změny výnosu použijeme směrodatnou odchylku pro výběrové soubory). Rovněž je vhodné „budoucí" výnosy diskontovat na jejich současnou hodnotu, abychom je mohli porovnávat.

Investor při svém rozhodování umisťuje své „bohatství“ (nejčastěji tímto bohatstvím jsou peníze, jindy cenné papíry apod.) formou nákupu (finančních) aktiv. Souhrn těchto finančních aktiv nazýváme portfolio. Připomeňme si, že portfolio tvořené různými aktivy není opět nic jiného než určitý druh aktiva (např. si lze zakoupit akcie investičních fondů) a že jednotlivé aktivum (např. akcie) není nic jiného než portfolio tvořené jedním druhem cenného papíru (obecněji aktiva).

Čas v teorii portfolia

Námi popsaný model chování investora uvažuje v zásadě dvojici různých časových okamžiků, a to:

1. *okamžik sestavování portfolia*, kdy si investor sestavuje své portfolio (tj. nakupuje vhodná aktiva, např. cenné papíry);
   (v praxi toto sestavování probíhá pochopitelně v průběhu určitého období, nicméně jako s aproximací se s tímto pojetím můžeme spokojit);
2. *okamžik realizace portfolia*, což je časový okamžik, kdy chce investor vlastnit portfolio „požadovaných“ vlastností (tj. např. portfolio s nejmenším možným rizikem změny výnosu aj.).

(Analogicky k předchozímu případu praxe chce pracovat s „obdobím“.)

[Jako poznámku přičiňme, že časovou náročnost na sestavování portfolia zohledňuje tzv. dynamická teorie portfolia, která však ve své podstatě vede k řešení posloupností úloh s dvojicí časových „bodů“ — okamžikem sestavování portfolia a okamžikem realizace portfolia.]

Pro pochopení toho, jak se investor chová, si vymezme, co je to *efektivní množina portfolií*. K tomu budeme potřebovat pojem dominovaných a nedominovaných aktiv.

Dominovaná a nedominovaná aktiva

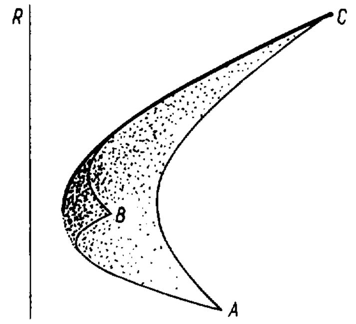
Je naprosto jisté, že některým aktivům dá každý „rozumný“ investor přednost před jinými a jiná aktiva jsou zjevně „nevhodná“. Jestliže se mohu například rozhodnout mezi držbou dvou aktiv se stejným očekávaným výnosem a s rizikem změny výnosu u 1. aktiva 10 a u 2. aktiva 100, pak zcela jistě budu preferovat držbu 1. aktiva před držbou 2. aktiva. Právě tak je jisté, že pokud obě aktiva budou mít stejné riziko změny výnosu, ale 1. aktivum bude mít větší očekávaný výnos než 2. aktivum, tak zcela jistě každý „rozumný“ investor dá přednost držbě 1. aktiva před 2. aktivem.

Proto je v teorii portfolia nezbytné vyčlenit nějakou speciální množinu aktiv (obecněji portfolií), kterou nazveme *množina efektivních portfolií*; pro všechny její prvky (= efektivní aktiva, popř. efektivní portfolia) platí:

a) nemůžeme vybrat ze všech přípustných aktiv (popř. portfolií) jiné aktivum, které by mělo větší výnos (a současně menší nebo stejné riziko změny výnosu), než má jakékoliv aktivum z množiny efektivních aktiv;
b) nemůžeme vybrat ze všech přípustných aktiv (popř. portfolií) jiné aktivum, které by mělo menší riziko změny výnosu (a současně stejný nebo větší očekávaný výnos), než má jakékoliv aktivum z množiny efektivních aktiv.

Abychom si lépe objasnili předchozí řádky, připomeňme si, jaké jsou preference „normálního“ ekonomického subjektu (např. jednotlivého člověka, banky apod.), který si sestavuje vlastní portfolio.

GRAF č. 1 Množina efektivních portfolií (tučně) na množině přípustných portfolií (vystínováno)



Tyto preference můžeme axiomaticky popsat dvojicí následujících tvrzení:
1. Ekonomický subjekt chce maximalizovat očekávaný výnos z portfolia.
2. Pokud náhodou více portfolií přináší stejný výnos, pak si vždy vybere portfolio s menším rizikem změny výnosu.

Na finančních trzích ovšem existuje možnost uložit peněžní prostředky i do obchodní banky na účet; tento vklad bude přinášet zisk patrně menší, než mohou vynést ostatní finanční aktiva (akcie a obligace), ale zato bude mít téměř nulové riziko změny výnosu z tohoto vkladu. (Mnohem výhodnější možností pro investora, než je umístění peněžních prostředků na termínovaný účet u obchodní banky, je nakoupit státní cenné papíry, v ideálním případě dokonce indexované státní cenné papíry.)

Tedy shrnuto: investor může své prostředky vložit do rizikových (= riziko změny výnosu aktiva není nulové) a nerizikových aktiv.

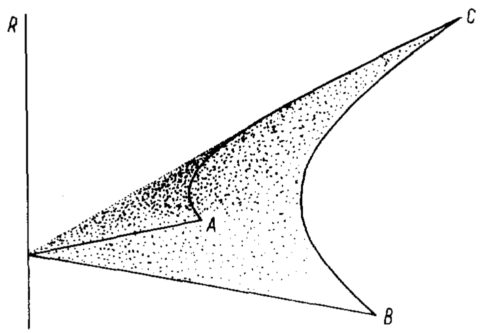
Jak je patrné, množina efektivních portfolií musí obsahovat nejvýše jedno (!) bezrizikové aktivum, neboť kdyby obsahovala bezriziková aktiva dvě, pak by jedno muselo mít větší očekávaný výnos než druhé. V případě stejných očekávaných výnosů by jedno z aktiv muselo mít menší riziko změny výnosu (je-li očekávaný výnos a riziko změny výnosu stejné, jde z hlediska investora o naprosto identická aktiva).

Množinu efektivních portfolií názorně zachycuje *graf č. 1.* Svislá osa, označená písmenem *R*, označuje velikost očekávaného výnosu z portfolia (aktiva), vodorovná osa (neuvedená) označuje riziko změny výnosu portfolia. Body označené písmeny *A, B* a *C* ukazují, jaká je kombinace rizika změny výnosu a očekávaného výnosu pro jednotlivá aktiva *A, B* a *C*. Čára spojující bod *A* s bodem *B* ukazuje, jaké kombinace rizika změny výnosu a očekávaného výnosu můžeme dosáhnout všemi přípustnými kombinacemi aktiva *A* a *B* (za předpokladu, že nedržíme záporný objem žádného z obou aktiv). Podobně je tomu i pro čáru spojující *A* a *C* a čáru spojující *B* a *C*. Šedá plocha ukazuje, jak vypadá množina přípustných portfolií složených ze 3 aktiv (popř. i dvou aktiv).

Jak bylo uvedeno, nemůže množina efektivních portfolií obsahovat více než jedno bezrizikové aktivum. Otázkou je, zda může obsahovat i aktivum, které je dominováno jinými aktivy.

Nejlepší odpověď nám dá *graf č. 2,* z něhož je patrné, že (za předpokladu neomezené dělitelnosti aktiv) vyřazení dominovaného aktiva *B* (aktivum *B* je dominováno aktivem *A*) způsobí, že dosažené riziko změny výnosu portfolia složeného pouze z aktiv *A* a *B* může být větší, než je tomu v případě portfolia složeného z *A, B* a *C.*

GRAF č. 2 $\sigma_{AB} = -1$, $\sigma_{AC} = 0$, $\sigma_{BC} = 0$, $R_A = 4{,}0$, $\sigma_A = 2{,}0$, $R_B = 3{,}0$, $\sigma_B = 4{,}0$, $R_C = 6{,}0$, $\sigma_C = 5{,}0$



Short sell [označme zkratkou SS]

Původně se jednalo o typ spekulační burzovní operace, kdy burzovní spekulant věří, že cena určité akcie bude klesat. Proto si vypůjčí (teď) akcie od brokera (= obchodníka s cennými papíry) do svého portfolia a hned je fyzicky prodá někomu, kdo věří, že cena téže akcie bude růst.

Bude-li spekulace úspěšná, nakoupí v budoucnu spekulant akcie levně zpět (v opačném případě musí akcie koupit zpět i za cenu ztráty). [Přirozeným nástrojem k provádění těchto typů obchodů jsou tzv. termínové kontrakty („options" a „futures"); popis použití těchto termínových kontraktů při „short sell" však bohužel přesahuje rámec této práce.]

[Dnes je sell short jako typ burzovní spekulace na světových burzách zpravidla znemožněn zákazem prodávat za nižší než kótovanou tržní cenu.]

V *teorii portfolia* je pojem „short sell" ztotožňován se situací, kdy provedu „sell short (= prodej nakrátko) a získanou hotovost investuji do nákupu jiných aktiv. Před okamžikem realizace portfolia nakoupím aktiva, která jsem prodal formou „sell short", zpět a předám je brokerovi, který tím získá nazpátek to, co předtím prodal ze svých zásob. [Majitel těchto cenných papírů, který svěřil své cenné papíry brokerovi, musí od „sestavovatele portfolia" dostávat přirozeně takový výnos (dividendy), jako kdyby měl cenné papíry u brokera.]

Jestliže ovšem aktiva prodám nakrátko, potom držený objem těchto aktiv je záporný.

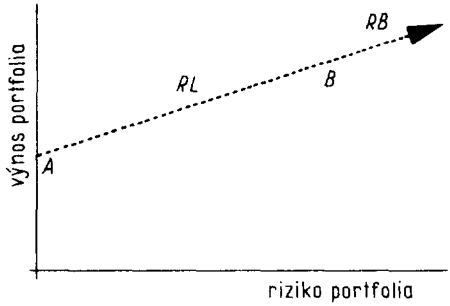
Jedinou výhodou „short sell" je to, že umožní zmenšit (ev. odstranit) riziko změny výnosu portfolia (podrobněji viz dále). Ale nic víc!

Z hlediska očekávaného výnosu portfolia dokonce v praxi dojde ke snížení výnosů z „mé vlastní části portfolia aktiv", protože musím platit nejen majiteli aktiva, ale navíc poplatky brokerovi za zprostředkování. To je také důvodem toho, proč se dnes od „short sell" ustupuje, byť v teorii portfolia tento relikt stále přežívá.

Bezriziková půjčka [angl. riskless lending]

Příklad: (Dnes) mám bohatství (např. hotovost) a chci (dnes) sestavit portfolio, které se bude „realizovat" za měsíc. Za část svého bohatství si nakoupím bezrizikové aktivum (např. státní pokladniční poukázku s dobou splatnosti za 1 měsíc = dám tzv. bezrizikovou půjčku vládě s výnosem, který nazýváme *bezriziková úroková sazba*) a za zbytek nakoupíme jiná (riziková) aktiva — viz *graf č. 3.*

GRAF č. 3 Portfolio složené z bezrizikového aktiva A a rizikového aktiva B. Úsečka RL označuje bezrizikovou půjčku aktiva A, polopřímka RB bezrizikovou výpůjčku aktiva A



Bezriziková výpůjčka [angl. riskless borrowing]

Příklad: (Dnes) mám bohatství (např. hotovost) a chci (dnes) sestavit portfolio, které se bude „realizovat" za měsíc. Navíc si vypůjčím (za tzv. *bezrizikovou úrokovou míru*) (dnes) v bance hotovost, kterou použiji na nákup určitých aktiv [⇒ v podstatě jsem si (riziková) aktiva vypůjčil — viz sell short — a držím je tedy v záporném objemu.]
Poznámka ke grafu č. 3: Pokud „volím z úsečky *RL*", znamená to, že část svého bohatství (= disponibilního kapitálu) poskytnu jako bezrizikovou půjčku (tj. aktivum *A* uložím na „bankovní" účet).

MODEL OCEŇOVÁNÍ KAPITÁLOVÝCH AKTIV [CAPM]

Ze základních stavebních kamenů, s nimiž jsme se seznámili v předchozí kapitole, se již můžeme pokusit sestavit tzv. CAPM-model následujícím způsobem:
Nejprve si stručně vymezme (a shrňme), jaké omezující podmínky přijímáme pro konstrukci tohoto modelu.

Předpoklady, za nichž lze model CAPM použít

Bude-li to vhodné, uvedeme v hranatých závorkách ([]) poznámky k reálnosti uvedených předpokladů a omezení.
1. Investor, který CAPM používá:
— se rozhoduje v současném okamžiku a portfolio se bude realizovat v konkrétním budoucím časovém okamžiku (v praktických aplikacích pochopitelně v určitém budoucím období);
— minimalizuje riziko změny výnosu v budoucím období;
[V ekonomice přirozeně existuje mnoho nejrůznějších typů rizik (politická, riziko změny měnových kurzů apod.), ale v zásadě lze mnohá (např. riziko změny měnových kurzů) z nich nějakým způsobem zahrnout do rizika změny výnosu. Popis metod, jak to provést, opět přesahuje rámec této práce.]
— maximalizuje očekávaný výnos v budoucím období.
2. Každý investor na trhu je schopen všechna možná portfolia na trhu porovnat mezi sebou navzájem (pomocí rizika změny výnosu a očekávaného výnosu) a sestavit si to portfolio, které mu vyhovuje.

3. Riziko změny výnosu portfolia a očekávaný výnos z portfolia existují. [Pozornému čtenáři připomeňme, že existují rozdělení náhodných veličin, která nemají střední hodnotu ani rozptyl — viz například Cauchyovo rozdělení.]
4. Všechna aktiva (kapitálová aktiva) jsou nekonečně dělitelná (tj. i části např. akcií mohou být předmětem koupě a prodeje).
5. Existuje úroková sazba, za kterou si mohu bezrizikově vypůjčit (např. od bankovní instituce), a úroková sazba, za kterou mohu bezrizikově půjčit mnou vlastněná aktiva (včetně peněz).
6. Všechna aktiva jsou obchodovatelná na trhu. [Tento předpoklad pochopitelně není pro všechny typy komodit splněn (umělecká díla typu „národní památka"), ale výjimky můžeme docela dobře zanedbat.]
7. Kapitálové trhy jsou efektivní ve smyslu:
— všechny typy informací jsou komukoliv a kdykoliv dostupné;
— nejsou kladena žádná omezení na objem aktiv, která si do svého portfolia vypůjčím nebo která ze svého portfolia půjčím;
— úroková sazba, za kterou půjčujeme, je stejná jako úroková sazba, za kterou půjčujeme jiným.
8. Všichni investoři mají stejná očekávání ohledně budoucnosti (tj. investoři mají stejné typy užitkových funkcí). [Pozor! Investoři mají stejné typy užitkových funkcí, ale ne stejné užitkové funkce. Každý investor (= sestavovatel portfolia) chce minimalizovat své riziko a maximalizovat svůj očekávaný výnos.]
Všichni investoři jsou při hodnocení trhu zajedno ohledně toho, jaké očekávají výnosy, rizika změny výnosů a kovariance mezi výnosy jednotlivých aktiv. [Toto je nejslabší část modelu CAPM.]
9. Na trhu je k dispozici pouze jeden typ bezrizikového aktiva. [Pokud je k dispozici více typů bezrizikových aktiv, je naprosto jasné, které bezrizikové aktivum si vyberu — viz úvahy o tom, proč množina efektivních portfolií obsahuje nejvýše jedno bezrizikové aktivum.]

Označme:
M — počet druhů aktiv (např. akcií) v portfoliu,
Z_i — relativní podíl i-tého aktiva v portfoliu (tj. $\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$),
R_F — očekávaný výnos z bezrizikového aktiva (portfolia),
R_P — očekávaný výnos z portfolia P,
σ_P — riziko změny výnosu z portfolia P,
X_i — náhodná veličina popisující výnos z i-tého cenného papíru,

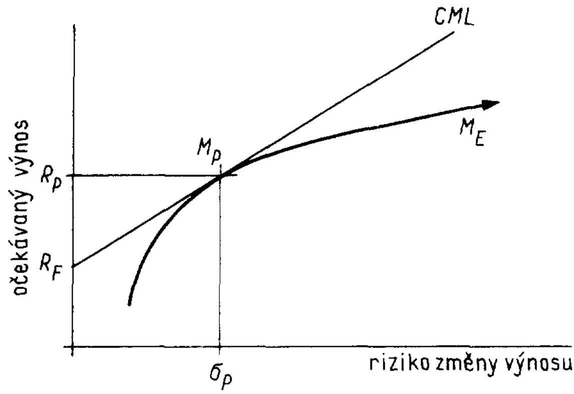
$$\text{tj. } X_i = \frac{TC_{it} - TC_{it-K} + D_{it}}{TC_{it-K}}$$

$$\text{Zřejmě platí: } R_P = E\left(\sum_{i=1}^{M} Z_i \,.\, X_i\right) = \sum_{i=1}^{M} Z_i \,.\, E(X_i) = \sum_{i=1}^{M} Z_i \,.\, R_i$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{M} Z_i^2 \,.\, \sigma_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M} Z_i \,.\, Z_j \,.\, \sigma_{ij}$$

Poznámka: Předpoklad, že „sell short" je zakázán, bude znamenat, že $Z_i \geqq 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, M$. [Pokud bude dovolen, omezení na nezápornost Z_i nebude.]

GRAF č. 4 Přímka kapitálového trhu (*CML*) za předpokladu, že SS je dovolen



Z grafu č. 3 je vidět, jak vypadá očekávaný výnos a riziko změny výnosu rizikového a bezrizikového aktiva za předpokladu, že sell short je dovolen i že je zakázán.

Množina efektivních portfolií za předpokladu, že SS je dovolen, bude „protažena" směrem „vpravo nahoru" do „nekonečna" — viz graf č. 4 a 5.

Na *grafu č. 4* je symbolem M_E označena množina efektivních portfolií složená výhradně z rizikových aktiv za předpokladu, že SS je dovolen. Symbolem *CML* je označena kombinace bezrizikového aktiva s portfoliem označeným M_P. Názornější představu dává tvrzení, že *CML* označuje množinu efektivních portfolií vzniklou kombinací rizikového a bezrizikového aktiva za předpokladu, že SS je dovolen.

Jak je patrné již z předchozích obrázků, bod M_P bude reprezentovat trochu „zvláštní" efektivní portfolio (tzv. tržní portfolio, angl. market portfolio) z množiny efektivních portfolií M_E. Tržní portfolio M_P bude mít tu pozoruhodnou vlastnost, že jeho existence spolu s existencí bezrizikové úrokové sazby R_F určuje celou množinu efektivních portfolií *CML*.

Nyní přikročme k popisu postupu, který nám umožní tržní portfolio M_P spočítat.

Výpočet tržního portfolia

Označme:

R_M — očekávaný výnos z tržního portfolia (M_P);

σ_M — riziko změny výnosu z tržního portfolia (M_P);

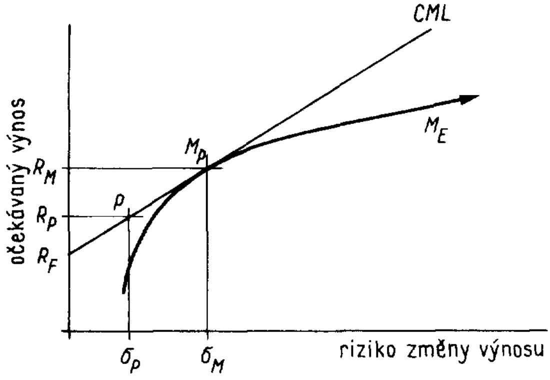
P — efektivní portfolio nějakého investora složené z určité kombinace rizikového portfolia a bezrizikového portfolia (aktiva). [V případě, že bod P bude totožný s M_P, bude efektivní portfolio P obsahovat samozřejmě pouze riziková aktiva.]

Pomocí podobnosti pravoúhlých trojúhelníků (na *grafu č. 5*) můžeme psát:

$$\frac{R_M - R_F}{\sigma_M} = \frac{R_P - R_F}{\sigma_P}$$

Odtud rovnou dostáváme rovnici *CML* (přesněji rovnici modelu kapitálových aktiv (CAPM) ve tvaru *CML*):

GRAF č. 5 Odvození rovnice *CML* z libovolného efektivního portfolia (*P*)



$$R_P = R_F + [R_M - R_F] \cdot \frac{\sigma_P}{\sigma_M}$$

Celý postup výpočtu tržního portfolia si rozdělíme pro přehlednost do několika fází:

1. fáze

Při odvození polopřímky *CML* (v případě, že sell short je dovolen), popřípadě úsečky mezi body R_F a M_P (v případě, že sell short je zakázán) postupujeme tak, že se snažíme maximalizovat velikost tangenty úhlu, který svírá polopřímka procházející bodem R_F („opřená" o množinu efektivních portfolií M_E) s vodorovnou osou („riziko změny výnosu").

Celkově můžeme formulovat úlohu nalezení směrnice přímky *CML* takto:

$$(UL) \qquad f(Z_1, \ldots, Z_M) = \frac{\sum_{i=1}^{M} Z_i (R_i - R_F)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} Z_i Z_j \sigma_{ij}}} \longrightarrow MAX \text{ za podmínky } \sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

2. fáze

Z charakteru obou podmínek lze dovodit (poměrně pracně — viz dále), že stačí uvažovat současně:

a) nutné podmínky pro volný extrém úlohy

$$f(Z_1, \ldots, Z_M) = \frac{\sum_{i=1}^{M} Z_i (R_i - R_F)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} Z_i Z_j \sigma_{ij}}}$$

b) omezující podmínku $\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$

Postup odvození předchozích dvou podmínek:
Úmluva: Symbol $f(Z)$ označuje účelovou funkci $f(Z_1, \ldots, Z_M)$ z (*UL*).

a) Funkce $f(Z)$ je homogenní nultého stupně, tj. platí $f(\alpha Z) = \alpha^0 f(Z)$ $[= f(Z)]$.
O této skutečnosti se můžeme nejlépe přesvědčit pomocí toho, že do účelové funkce $f(Z)$ dosadíme místo Z_i výraz αZ_i. Jak bude patrno, můžeme čitatele i jmenovatele ve funkci $f(Z)$ pokrátit symbolem (nenulovým) α.

b) Z předchozí „rovnice" $f(\alpha Z) = f(Z)$ můžeme odvodit, že

$$(Z1) \quad \frac{\partial f(\alpha Z)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial f(\alpha Z)}{\partial (\alpha Z_i)} \cdot \frac{\partial (\alpha Z_i)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial f(\alpha Z)}{\partial (\alpha Z_i)} \cdot Z_i \text{ a } \frac{\partial f(Z)}{\partial \alpha} = 0$$

což plyne z toho, že derivujeme konstantní funkci podle proměnné α (která se pochopitelně v konstantní funkci nevyskytuje).
Protože však musí platit, že derivace levé strany rovnice podle α je stejná jako derivace pravé strany podle proměnné α, musí se i právě vypočtené derivace rovnat, a tedy zřejmě platí:

$$(Z2) \quad \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial f(\alpha Z)}{\partial (\alpha Z_i)} \cdot Z_i = 0$$

c) Je jasné, že výraz (Z2) musí platit pro libovolné α (není nutné aby $\alpha > 1$), a proto musí platit i pro $\alpha = 1$.
Dosadíme-li do vzorce (Z2) $\alpha = 1$, přejde tento vzorec do tvaru

$$(Z3) \quad \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial f(Z)}{\partial Z_i} \cdot Z_i = 0$$

d) Sestavíme Lagrangeovy funkce k úloze (UL):

$\hat{\mathscr{L}}(Z, \lambda_0^*, \lambda^*) = \lambda_0^* f(Z) + \lambda^* \left(\sum_{i=1}^{M} Z_i - 1 \right)$. Předpokládejme, že $\lambda_0^* \neq 0$, a tedy substitucí $\lambda = \frac{1}{\lambda_0^*} \lambda^*$ dostaneme $\mathscr{L}(Z, \lambda) = f(Z) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{M} Z_i - 1 \right)$.

Nutné podmínky pro extrém úlohy (UL) pak jsou:

$$(C1) \quad \frac{\partial f(Z)}{\partial Z_k} + \lambda = 0 \text{ pro } k = 1, \dots, M$$

$$(C2) \quad \sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

e) (Pozor, zde použijeme malého triku.) Obě strany v $(C1)$ vynásobíme proměnnou Z_k a potom posčítáme „přes všechna k" ($k = 1, \dots, M$). Tím dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial f(Z)}{\partial Z_k} \cdot Z_k = -\lambda \sum_{k=1}^{M} Z_k \text{ (dokonce víme, že } \sum_{i=1}^{M} Z_i = 1)$$

Ovšem rovnice (Z3) tvrdí, že $\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial f(Z)}{\partial Z_i} \cdot Z_i = 0$, a odtud lehko dostáváme $\lambda = 0$.

f) Stačí tedy řešit nutné podmínky ve formě:

$$(C3) \quad \frac{\partial f(Z)}{\partial Z_k} = 0 \text{ pro } k = 1, \dots, M$$

$$(C4) \quad \sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

Poznámka: Vidíme, že podmínky $(C3)$ nejsou nic jiného, než podmínky nutné při hledání tzv. volného extrému funkce $f(Z)$. [konec odvození]

Zaveďme symbol A (pro čitatel) a B (pro druhou mocninu jmenovatele) ve výrazu

$$\frac{\sum_{i=1}^{M} Z_i (R_i - R_F)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=i}^{M} Z_i Z_j \sigma_{ij}}} = \frac{A}{B^{\frac{1}{2}}}$$

Tedy:

a) Nutná podmínka pro volný extrém úlohy $f(Z_1, \dots, Z_M) \to MAX$ je dána vztahem:

$$\frac{\partial f(Z)}{\partial Z_k} = \frac{(R_k - R_F)\, B^{\frac{1}{2}} - A \frac{1}{2} B^{-\frac{1}{2}} [2 \sum_{j=1}^{M} Z_j \sigma_{kj}]}{B^{2 . \frac{1}{2}}} = 0 \; pro \; k = 1,2, \dots, M$$

Podělme předchozí rovnici výrazem $B^{\frac{1}{2}}$ a dostaneme soustavu rovnic, jejímž řešením můžeme spočítat nutnou podmínku pro volný extrém úlohy funkce $f(Z_1, \dots, Z_M)$:

$$(R_k - R_F) - \frac{A}{B} \sum_{j=1}^{M} Z_j \sigma_{kj} = 0, \text{ pro } k = 1, 2, \dots, M$$

b) Omezující podmínka (zajišťuje, že výsledek bude v relativním vyjádření):

$$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

Poznámka: Jak je vidět z předchozího, je tedy zadáno celkem $M+1$ rovnic o M neznámých $Z_1, \dots, Z_M$.

3. fáze

Nyní budeme řešit soustavu rovnic, která popisuje nutné podmínky pro maximalizaci tangenty úhlu přímky *CML* s horizontální osou.

Připomeňme nutné podmínky:

(1) $$(R_k - R_F) - \frac{A}{B} \sum_{j=1}^{M} Z_j \sigma_{kj} = 0, \text{ pro } k = 1, 2, \dots, M$$

(2) $$\sum_{i=1}^{M} Z_i = 1$$

Proveďme substituci $Y_k = \frac{A}{B^2} Z_k$, pro $k = 1, 2, \dots, M$.

V důsledku toho soustava rovnic (1) přejde do tvaru:

(3) $$(R_k - R_F) - \sum_{j=1}^{M} Y_j \sigma_{kj} = 0, \text{ pro } k = 1, 2, \dots, M$$

Rovnice (2) přejde do tvaru:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{M} Y_i = \frac{A}{B}. \text{ Odtud pak zřejmě vyplývá vztah } Z_k = \frac{Y_k}{\sum_{i=1}^{M} Y_i}$$

pro $k = 1, 2, \ldots, M$.

Vyřešit soustavu rovnic (3) [M rovnic o M neznámých] je triviální. Pomocí rovnice (4) spočteme po vyřešení soustavy (3) velikost relativního podílu jednotlivých aktiv v tržním portfoliu (M_P).

Pochopitelně zbývá zodpovědět otázku, zda bod $(Z_1, \ldots, Z_M)$, který řeší soustavu (3) spolu s rovnicí (4), je bodem, v němž funkce $f(Z_1, \ldots, Z_M)$ nabývá svého globálního maxima.

Abychom se vyhnuli složitým matematickým výrazům, vynechejme bližší podrobnosti a spokojme se s tvrzením, že ve „zdrcující" většině praktických aplikací CAPM-modelu jde skutečně o globální maximum [tušíme zde souvislost s tím, že kovarianční matice výnosů aktiv $X_1, X_2, \ldots, X_M$ je pozitivně (semi) definitní].

MODEL OCEŇOVÁNÍ KAPITÁLOVÝCH AKTIV VE TVARU PŘÍMKY TRHU CENNÝCH PAPÍRŮ *(SML)*

V praktických aplikacích se investoři (např. investiční společnosti a penzijní fondy) snaží pro jednotlivá finanční aktiva zjistit nejen velikost očekávaného výnosu a rizika změny výnosu, ale rovněž kvantifikovat míru ovlivnitelnosti rizika změny výnosu jednotlivého aktiva „celkovým rizikem změny výnosu na trhu aktiv". V důsledku toho získá investor možnost zjistit, do jaké míry je riziko změny výnosu důsledkem rozhodování firemního managementu, nebo specifické situace odvětví, v němž firma podniká.

Pro tento účel si připomeneme dva důležité pojmy, se kterými se setkáváme v učebnicích teorie portfolia a firemních financí:

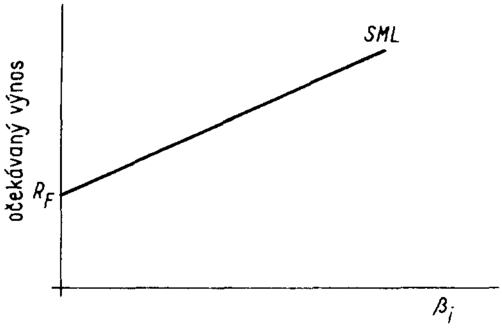
a) *Systematické riziko* [tzv. riziko trhu] změny výnosu aktiva je riziko, které vyplývá z rizika změny výnosu aktiv na celém trhu cenných papírů (aktiv). Korektněji vzato, jde o riziko změny výnosu tržního portfolia (M_P). {Nejde tedy o riziko, které vyplývá ze specifických vlastností zkoumaného aktiva.}

b) *Nesystematické riziko* [tzv. riziko firmy] změny výnosu aktiva je riziko, které je vyvoláno výhradně faktory, které mohou ovlivnit jen výnos z konkrétního cenného papíru (aktiva), nebo faktory, které působí pouze na určitou skupinu cenných papírů, nikoliv však na všechna aktiva na trhu (přesněji na všechna aktiva v tržním portfoliu).

Nejprve si připomeňme použité značení:

M je maximálně možný počet (finančních) aktiv v portfoliu (tj. počet aktiv na trhu, ze kterých si investor může sestavit své portfolio);
N je počet pozorování jednotlivých náhodných veličin X_i ($i = 1, 2, \ldots, M$);
X_i je náhodná veličina, která popisuje výnos z i-tého aktiva;
σ_i je riziko změny výnosu i-tého aktiva;
R_i je očekávaný výnos i-tého aktiva;
X_M je náhodná veličina, které popisuje výnos z tržního portfolia cenných papírů (M_P);

GRAF č. 6 Přímka *i*-tého cenného papíru (aktiva) *(SML)*



R_M je očekávaný výnos tržního portfolia (M_P);
σ_M je riziko změny výnosu tržního portfolia (M_P);
R_F je výnos z bezrizikového portfolia na trhu (někdy jej ztotožňujeme s bezrizikovou úrokovou sazbou v bankovních institucích);
σ_{Mi} je kovariance mezi výnosem *i*-tého aktiva (X_i) a výnosem tržního portfolia (M_P).

Předpokládejme, že výnos *i*-tého aktiva je „vhodně" vystižen následující rovnicí

(5) $X_i = R_F + \beta_i [X_M - R_F]$

Jde o tzv. rovnici přímky cenných papírů (angl. security market line — odtud plyne anglická zkratka *SML*) — srov. *graf č. 6.*

Identita daná rovnicí (5) pochopitelně nemusí být nutně splněna, a proto rovnici (5) nahrazujeme rovnicí (6) definovanou vztahem:

(6) $X_i = R_F + \beta_i [X_M - R_F] + e_i$

kde β_i je tzv. β-koeficient *i*-tého aktiva (β_i je reálné číslo);
e_i je tzv. náhodná chyba (což není nic jiného než náhodná veličina, na kterou budeme klást nejelementárnější požadavky, které čtenář zná z učebnic statistiky a ekonometrie — viz dále).

V rovnici (6) proveďme pro své pohodlí substituci $\alpha_i = R_F - \beta_i R_F$. Tím dostaneme vztah důvěrně známý z učebnic:

(7) $X_i = \alpha_i + \beta_i X_M + e_i$, kde $\alpha_i, \beta_i \in R$, $i = 1, \ldots, M$.

Požadavky (axiomy) kladené na náhodnou chybu e_i

Význam požadavků je dán spíše potřebami výpočetními (tj. potřebou provést ekonometrické odhady dostatečně jednoduchými prostředky) než požadavky ekonomickými. Mohli bychom sice diskutovat, do jaké míry jsou uvedené předpoklady splněny na skutečných finančních trzích, ale došli bychom k závěru, že předpoklady v „dlouhém" období zcela jistě neplatí, ale v období „krátkém" (řádově dny a týdny) nejsou naproti tomu vůbec nerealistické.

Dalším dobrým důvodem, proč dále uvedené úpravy dělat, je to, že totiž následující předpoklady o e_i jsou totožné s předpoklady, které vymezují tzv. slabou formu efektivního trhu [což je taková forma efektivního trhu, kdy nemohu dlouhodobě dosahovat nadprůměrných „výnosů" z obchodování s finančními aktivy pomocí pouhé znalosti údajů o vývoji tržních cen a obchodovaných objemů cenných papírů (aktiv)]. Empirické studie tvrzení o slabé formě efektivnosti trhu s cennými papíry spíše potvrzují, než vyvracejí.

Přistupme nyní k vymezení jednotlivých axiomů.

($A1$) $E(e_i) = 0$ pro $i = 1, \ldots, N$

Odtud plyne $E(X_i) = \alpha_i + \beta_i E(X_M)$.

($A2$) $Cov(e_i, X_M) = 0$ pro $i = 1, \ldots, N$.

Odtud s využitím definice $Cov(e_i, X_M) = E[(e_i - E(e_i))(X_M - R_M)]$ a díky axiomu ($A1$) (tj. $E(e_i) = 0$) plyne, že $E[e_i(X_M - R_M)] = 0$. Důsledkem toho je vztah

$E[(X_i - \alpha_i - \beta_i X_M)(X_M - R_M)] = 0$, z něhož triviálním „trikem"

$E[(X_i - R_i - \alpha_i - \beta_i X_M + R_i)(X_M - R_M)] =$

$= E[(X_i - R_i)(X_M - R_M) - \alpha_i (X_M - R_M) - \beta_i (X_M + R_i)(X_M - R_M) + R_i (X_M - R_M)] = 0$ dostaneme vztah

$Cov(X_i, X_M) - \beta_i Var(X_M) = 0$

($A3$) $Cov(e_i, e_j) = 0$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, N$ $(i \neq j)$; odtud plyne, že $E(e_i e_j) = 0$.

Poznámka: Z ($A1$) a ($A3$) je patrné, že vektor tvořený náhodnými veličinami e_i je konečnou podmnožinou stochastického procesu známého pod názvem náhodný výběr.

Spočtěme rozptyl náhodné veličiny e_i (tj. $Var(e_i)$):

$$Var(e_i) = Var(X_i - \alpha_i - \beta_i X_M) = Var(X_i - \beta_i X_M) = \\ = Var(X_i) - 2\beta_i Cov(X_i, X_M) + \beta_i^2 Var(X_M)$$

Protože podle ($A2$) je $Cov(X_i, X_M) = \beta_i Var(X_M)$, můžeme napsat

$$Var(e_i) = Var(X_i) - \beta_i^2 Var(X_M)$$

Připomeňme si vztah:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= Cov(X_i, X_j) = \\ &= \mathrm{E}[\{(\alpha_i + \beta_i X_M + e_i) - (\alpha_i + \beta_i E(X_M))\}. \\ &\quad .\{(\alpha_j + \beta_j X_M + e_j) - (\alpha_j + \beta_j E(X_M))\}] = \\ &= E[\{\beta_i (X_M - E(X_M)) + e_i\}.\{\beta_j (X_M - E(X_M)) + e_j\}] = \\ &= \beta_i \beta_j E[(X_M - E(X_M))^2] + \beta_j E[e_i (X_M - E(X_M))] + \\ &\quad + \beta_i E[(e_j (X_M - E(X_M))] + E[e_i, e_j] = \\ &= \beta_i \beta_j Var(X_M)\end{aligned}$$

Odhad lineárního modelu

Nyní si můžeme připomenout, jak vypadají nevychýlené estimátory charakteristik sdruženého (a marginálního) rozdělení náhodného vektoru $(X_1, X_2, \ldots, X_M)$ při N po dvou navzájem nekorelovaných pozorováních sdruženého vektoru náhodných veličin $(X_1, X_2, \ldots, X_M)$ [přesnějším označením je: $(X_1, X_2, \ldots, X_M) = (X_1, X_2, \ldots, X_M)_t$, kde $t = 1, 2, \ldots, N$].

Symbolem X_{it} označíme t-tou náhodnou veličinu popisující výnos z i-tého aktiva (tj. výnos z i-tého aktiva v časovém okamžiku t).

Očekávaný výnos i-tého aktiva (R_i) odhadneme pomocí estimátoru průměru:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} X_{it}$$

Čtverec rizika změny výnosu i-tého aktiva (σ_i) odhadneme pomocí estimátoru rozptylu:

$$S_i^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N} [X_{it} - \bar{X}_i]^2$$

Kovarianci (σ_{iM}) odhadneme pomocí vztahu:

$$S_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N} (X_{it} - \bar{X}_i)(X_{jt} - \bar{X}_j)\,(N > 1)$$

ODHAD VELIKOSTI PARAMETRŮ α_i a β_i

Zde jenom stručně nastíníme, jakým způsobem můžeme odhadnout velikosti parametrů α_i a β_i. Podrobnější informace můžeme najít v libovolné učebnici statistiky nebo ekonometrie.

Protože platí $E(X_i) = \alpha_i + \beta_i E(X_M)$ a
$Cov(X_i, X_M) = \beta_i Var(X_M)$,

zde se jako nejvhodnější jeví použít dříve uvedené estimátory charakteristik $E(X_i)$, $Cov(X_i, X_M)$ a $Var(X_M)$ a v důsledku toho

$$\bar{X}_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i \bar{X}_M$$
$$S_{iM} = \hat{\beta}_i S_M^2$$

Tedy $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ jsou statistiky (tj. náhodné veličiny, jejichž funkční hodnoty nahrazují skutečné velikosti parametrů α_i a β_i při pozorovaných funkčních hodnotách náhodných veličin $X_{i1}, \ldots, X_{iN}, X_{M1}, \ldots, X_{MN}$).

Odtud

$$\hat{\beta}_i = \frac{S_{iM}}{S_M^2}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{X}_i - \frac{S_{iM}}{S_M^2} \bar{X}_M$$

Dále bychom měli zkoumat vlastnosti estimátorů (tj. např. $E(\hat{\alpha}_i)$, $Var(\hat{\alpha}_i)$ atd.), ale spokojme se jen s poznámkou, že estimátory jsou nejlepší nestranné mezi všemi lineárními estimátory. Podrobnější informace můžeme opět najít v učebnicích ekonometrie a statistiky.

ROZHODOVÁNÍ O KOUPI A PRODEJI AKTIVA NA ZÁKLADĚ *SML*

Již víme, co je to tržní portfolio a co je to přímka *SML*. Nyní si uvedeme, jakým způsobem můžeme znalost *SML* (a tržního portfolia) využít při rozhodování o nákupu a prodeji cenných papírů (finančních aktiv).

Připomeňme značení:
R_F — očekávaný výnos z bezrizikového aktiva, které je na trhu k dispozici,
R_i — očekávaný výnos z i-tého aktiva, které je na trhu k dispozici ($i = 1, \ldots, M$),
R_M — očekávaný výnos z tržního portfolia (market portfolio),
β_i — β-koeficient i-tého aktiva, které je na trhu k dispozici.
Rovnice *SML* tvrdí, že:

(8) $T_i = R_F + \beta_i[R_M - R_F]$, kde koeficient

T_i je teoretický očekávaný výnos i-tého aktiva [spočtený z (8)].

Odtud také vyplývá přirozený návod na chování investora na trhu finančních aktiv:

a) Když $T_i < R_i$, potom KUPUJ i-té aktivum, protože i-té aktivum je podhodnoceno. [Jinak řečeno: očekávaný výnos i-tého aktiva je větší než jeho tržní výnos, a tedy i-té aktivum je relativně „levné".]
b) Když $T_i > R_i$, potom PRODÁVEJ i-té aktivum, protože i-té aktivum je na trhu nadhodnoceno.

Poznámky k indexu β_i

1. $\beta_i > 0$ Růst výnosů z tržního portfolia (M_P) způsobí i růst výnosu z i-tého aktiva.
   $\beta_i < 0$ Růst výnosů z tržního portfolia způsobí pokles výnosu z i-tého aktiva.
   $\beta_i = 0$ Růst ani pokles výnosů z tržního portfolia nemá vliv na výnos i-tého aktiva.
2. β_i má historicky tendenci k růstu. [Snad pod vlivem zefektivňování trhů, což je proces, kdy investoři ztrácejí možnost dosahovat mimořádné zisky pouhým nákupem „vhodných" cenných papírů.]

(2., poslední část příspěvku bude uveřejněna v č. 3/95)