FINANCE A ÚVĚR 5/1997
ročník 47

Vydává Ministerstvo financí České republiky ve spolupráci s Českou národní bankou ve vydavatelství Economia, a. s., Praha

Adresa redakce: Vinohradská 49
120 74 Praha 2
Tel.: (02) 22 25 00 36 nebo: (02) 215 93 171
Fax: (02) 21 59 32 03

Šéfredaktor: Ing. Ivan Kočárník, CSc.

FINANCE A ÚVĚR 5/1997

Volume 47

Publishers: Ministry of Finance of the Czech Republic in Cooperation with Czech National Bank in Publishing House Economia, Prague

Editor's Office: Vinohradská 49
120 74 Prague 2
Czech Republic

Editor in Chief: Ivan Kočárník

OBSAH

CONTENTS

DT: 336.732; 519.866 (437)

Dynamický model stavební spořitelny

Petr KIELAR*

V tomto článku je uveden obecný matematický model stavební spořitelny zaměřený na popis její likvidity. Model je aplikován na zjednodušené vzorové situace exponenciálního úbytku a nárůstu nových klientů.

Úvod

Stavební spoření bylo v České republice uzákoněno v roce 1993 se záměrem podpořit bytovou výstavbu. Velmi rychle vzniklo šest stavebních spořitelen, které začaly nabízet u nás donedávna neznámý produkt – stavební spoření.

Stavební spoření si velmi rychle našlo své místo a dnes již patří k nejznámějším bankovním produktům. Přestože trh se stavebním spořením není dosud plně stabilizován, vzhledem ke stavu bytové výstavby se opakovaně v diskuzích zvažují možné úpravy a vylepšení systému stavebního spoření u nás. Cílem tohoto článku je uvést formalizovaný popis funkce stavební spořitelny, který by mohl být východiskem pro další úvahy.

Stavební spoření

Mezi běžnou bankou a stavební spořitelnou existují určité rozdíly, jež mají zásadní vliv na principy jejich podnikání. Tyto rozdíly jsou dány především zákonem o stavebním spoření. Pro naše účely je můžeme shrnout následovně:

- stavební spořitelna má zákonem omezenou úrokovou marži;
- stavební spořitelna má povinnost poskytovat svým klientům za stanovených podmínek účelové úvěry;
- stavební spořitelna zprostředkovává svým klientům státní podporu.

Typické hodnoty úrokových sazeb stavebních spořitelen jsou 3 % p. a. pro vklady, a 6 % p. a. pro úvěry. Úvěry poskytované stavebními spořitelnami jsou tedy pro klienty velmi výhodné, a to nejen nízkou úrokovou sazbou, ale i určitou volností při splácení. Stavební spořitelny totiž vesměs dovolují mimořádné splátky jistiny nad rámec sjednané měsíční anuity bez jakýchkoli sankcí. Tato pro klienty příjemná vlastnost samozřejmě souvisí s nízkou úrokovou sazbou.

Z předešlého je zřejmé, že jediným zdrojem pro poskytování takto výhodných úvěrů mohou být pouze vklady klientů úročené dostatečně nízkou úrokovou sazbou. Ukládání prostředků u stavební spořitelny je pro klienty

* Dr. Petr Kielar – Českomoravská stavební spořitelna, a. s., Praha

atraktivní nejen pro možnost získat výhodný úvěr, ale také díky státní podpoře, která činí 25 % z ročně uspořené částky. Tato státní podpora podstatně zvyšuje zhodnocení uložených prostředků[1], což je také jejím posláním. Tvorba zdrojů je skutečně hlavním důvodem pro poskytování státní podpory, a proto je přiznávána i těm účastníkům stavebního spoření, kteří spoří alespoň pět let, ačkoliv pak použijí naspořenou částku na jiné než bytové potřeby. Státní podporu je nutné chápat jako příspěvek na tvorbu zdrojů pro poskytování účelových úvěrů.

Zásadní otázkou, kterou musí mít stavební spořitelna vyřešenu, je právě dostatek zdrojů. Obchodní podmínky musejí být stanoveny tak, aby vklady klientů vždy postačovaly ke krytí úvěrů. V opačném případě by totiž stavební spořitelna byla nucena buď pozastavit poskytování úvěrů (což by vedlo ke snížení kreditu banky, k odlivu klientů, a tím i k dalšímu zhoršení situace), nebo si prostředky obstarat na mezibankovním trhu (což by bylo vzhledem k výši úrokových sazeb nutně ztrátové).

V obchodních podmínkách stavební spořitelny je tedy zcela přesně popsáno, za jakých podmínek může klient úvěr získat. Kromě podmínek běžných pro všechny úvěrové obchody (jako je například zajištění úvěru či bonita klienta), se u stavebního spoření vyskytuje také požadavek, aby klient před získáním úvěru po určitou dobu spořil. Délka spoření a jeho intenzita bývá popsána dvěma ukazateli. Klient si především musí naspořit určitou částku (většinou ve výši srovnatelné s výší požadovaného úvěru) a kromě toho musí být po určitou dobu jeho prostředky k dispozici stavební spořitelně. Tato druhá podmínka bývá kvantifikována prostřednictvím hodnoticího čísla. V dalších odstavcích se budeme věnovat právě tomu, jakým způsobem lze popsat fázi spoření i fázi splácení úvěru a jak mají být vzájemně vyváženy.

Statický model

Velmi jednoduchý – a pro mnohé účely postačující – model získáme prostou úvahou. Omezíme se na případ, kdy denní počet nových klientů je konstantní, přičemž chování jednotlivých klientů se liší pouze tím, že někteří z nich chtějí úvěru využít, někteří nikoli. Zároveň předpokládáme, že početní zastoupení těchto dvou typů se v čase nemění. Po určité době se kolektiv klientů ustálí; a právě tento stacionární stav budeme zkoumat.

Označme N_p počet denně získaných nových klientů, N_a budiž počet denně poskytnutých úvěrů. Ve stacionárním stavu musí platit $N_p \geq N_a$, přičemž rozdíl $N_p - N_a$ udává počet klientů, kteří ukončili spoření, aniž využili možnosti získat úvěr. Dále označme f_p^i zůstatek na účtu klienta i-tý den od zahájení spoření a f_a^i zůstatek na účtu klienta i-tý den od poskytnutí úvěru. Ve stacionárním stavu bude celkový objem vkladů:

$$F_p = N_p \sum_i f_p^i \tag{1}$$

a celkový objem úvěrů:

$$F_a = N_a \sum_i f_a^i \tag{2}$$

[1] Výsledné efektivní zhodnocení prostředků uložených na účet stavebního spoření samozřejmě velmi silně závisí na výši a pravidelnosti spořicích úložek. Při pravidelném měsíčním spoření činí typické vnitřní výnosové procento (IRR) přibližně 12 % p. a.

Sumace v těchto vztazích probíhá přes všechna i, pro která je f_p^i či f_a^i nenulové. Nyní v souladu s úvahami učiněnými výše budeme požadovat, aby vklady klientů plně kryly poskytnuté úvěry, tedy:

$$\frac{F_p}{-F_a} \geq 1 \qquad (3)$$

Zavedeme-li poměr $p = N_a / N_p$, pak můžeme podmínku (3) zapsat ve tvaru:

$$p \leq \frac{\sum_i f_p^i}{-\sum_i f_a^i} \qquad (4)$$

Zlomek na pravé straně této nerovnosti je nazýván SKLV (z německého Sparer-Kassen-Leistungsverhältniss), tedy poměr výkonu klienta a spořitelny. Podmínka (4) je velmi důležitá, neboť nám říká, za jakých podmínek je možné poskytovat úvěry, aniž by došlo k přečerpání omezených zdrojů. Na první pohled je patrné, že mohou nastat případy, kdy je zlomek na pravé straně menší než jedna; to znamená, že není možné, aby každý klient získal úvěr ze zdrojů, které vytvořili ostatní klienti svými úložkami. Právě tyto případy jsou pro praxi zajímavé a jimi se budeme dále podrobněji zabývat.

Zobecnění

Statický model popsaný v předchozím odstavci je často používán pro svou jednoduchost. Pro běžné potřeby analýzy produktů stavebních spořitelen většinou postačuje. Pokusme se však nyní zformulovat obecnější popis problému, který by dokázal vystihnout i jevy spojené s časovým vývojem systému.

Ukazuje se, že vhodnější bude přejít ke spojitému popisu. V praxi samozřejmě nemá smysl používat kratší časovou jednotku, než je den; nicméně zvolený postup umožňuje formalizovat zápis do přehlednějšího a kompaktnějšího tvaru. Počet nových klientů N_p nahradíme četností závislou na čase $n_p(t)$. Počet nových klientů (tedy vlastně počet nově uzavřených smluv o stavebním spoření) za časový interval (t_1, t_2) tedy bude:

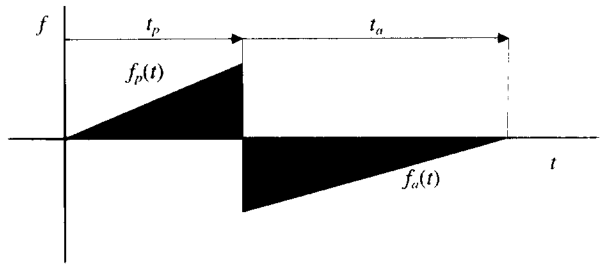
$$N_p(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} n_p(t)\, dt \qquad (5)$$

Časově proměnná bude i pravděpodobnost $p(t)$ využití úvěru. Tato funkce říká, že pokud získá v okamžiku t_1 nárok na úvěr celkem $N(t_1)$ klientů, využije tohoto nároku pouze $p(t_1)N(t_1)$ z nich. Ostatní [tedy $(1-p(t_1))N(t_1)$] smlouvu o stavebním spoření vypovědí, a tak přestávají být účastníky stavebního spoření. Zůstatek na vkladovém účtu klienta po uplynutí doby t od zahájení spoření bude popsán funkcí $f_p(t)$. Podobně zůstatek úvěrového účtu po uplynutí doby t od jeho poskytnutí bude dán funkcí $f_a(t)$ – *graf 1*. Celkový objem vkladů všech účastníků stavebního spoření v čase T tedy můžeme psát ve tvaru:

$$F_p(T) = \int_{-\infty}^{T} n_p(t)\, f_p(T-t)\, dt \qquad (6)$$

Doba spoření je ovšem omezená. Označme tuto dobu t_p. Pak $f_p(t)$ je nenulová pouze v intervalu $(0, t_p)$ a saldo vkladových účtů můžeme přepsat do tvaru:

GRAF 1 Zavedení jednotlivých veličin



$$F_p(T) = \int_0^{t_p} n_p(T-t)\, f_p(t)\, dt \tag{7}$$

Analogicky stanovíme saldo úvěrových účtů v čase T:

$$F_a(T) = \int_0^{t_a} n_p(T-t-t_p)\, f_a(t)\, p(T-t)\, dt \tag{8}$$

Zde t_a označuje dobu splácení úvěru. Podmínka dostatečných zdrojů (3) bude mít nyní časovou proměnnou:

$$\frac{F_p(T)}{-F_a(T)} \geq 1 \tag{9}$$

Zobecněním jsme tedy získali model, který plně popisuje i nestacionární systémy. Podívejme se však nejprve, jak v tomto popisu vypadá stacionární případ.

Ve stacionárním případě budou n_p i p konstanty nezávislé na čase, takže vzájemným dosazením (7) a (8) do (9) dostaneme podmínku:

$$p \leq \frac{\int_0^{t_p} f_p(t)dt}{\int_0^{t_a} f_a(t)dt} \geq 1 \tag{10}$$

která je formálně podobná podmínce (4).

Jaký je důsledek této podmínky? Aplikujeme ji na zjednodušený typ klienta stavební spořitelny. Zavedeme ideální tarif, ve kterém nebudou vklady ani úvěry úročeny[2]. Pokud budeme uvažovat pravidelně spořícího i splácejícího klienta, budou zůstatky na vkladových i úvěrových účtech lineární funkcí času:

$$\begin{aligned} f_p(t) &= k_p t & \quad 0 \leq t \leq t_p \\ f_p(t) &= 0 & \quad t<0,\ t>t_p \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f_a(t) &= -f_p(t_p) + k_a t & \quad 0 \leq t \leq t_a \\ f_a(t) &= 0 & \quad t<0,\ t>t_a \end{aligned} \tag{12}$$

[2] Tarif s nulovými úrokovými sazbami je zjednodušením, které však zásadním způsobem neovlivní vypovídací schopnost zkoumaného příkladu. Jiná situace by nastala v případě výpočtu zisku stavební spořitelny. Pro účely zkoumání likvidity však použité zjednodušení zcela vyhovuje.

kde k_p (k_a) je intenzita spoření (splácení), tedy jakási spojitá analogie diskrétních spořicích úložek a splátek úvěru.

Jak je zřejmé z rovnice (12), předpokládáme poskytnutí úvěru ve výši naspořené částky. V našem ideálním tarifu tedy klient naspoří 50 % cílové částky a získá úvěr ve stejné výši. Doba splatnosti úvěru t_a je s intenzitou splácení k_a svázána jednoduchým vztahem:

$$f_a(t_a) = 0 = -k_p t_p + k_a t_a \tag{13}$$

Předpokládejme dále, že podíl klientů, kteří využijí úvěr, bude časově konstantní. Pak po dosazení dostaneme podmínku:

$$p \leq \frac{t_p}{t_a} \tag{14}$$

Tedy doba splatnosti úvěru musí být v určitém vztahu k době spoření. Speciálně pokud $p = 1$ (tedy úvěr využijí všichni klienti), musí být $t_p \geq t_a$.

Likvidita při proměnném počtu klientů

Prozatím jsme se zabývali pouze stacionárními případy, kdy všechny veličiny byly v čase konstantní. Zajímavé však jsou i složitější případy, kdy je četnost nových klientů $n_p(t)$ funkcí času.

Zobecněný model budeme nyní aplikovat na případ, kdy je počet nových klientů exponenciální funkcí času. Funkce popisující zůstatek na účtu ponecháme opět lineární a pravděpodobnost využití úvěru p ponecháme opět na čase nezávislou. Četnost n_p zavedeme vztahem:

$$n_p(t) = N_0 \exp(t/\tau) \tag{15}$$

Parametr τ kvantifikuje rychlost změny počtu nových klientů, a to buď růst ($\tau > 0$), nebo pokles ($\tau < 0$).
Saldo vkladových a úvěrových účtů tedy můžeme psát ve tvaru:

$$F_p(T) = \int_0^{t_p} N_0 \exp\left(\frac{T-t}{\tau}\right) k_p t \, dt \tag{16}$$

$$F_p(T) = \int_0^{t_a} N_0 \exp\left(\frac{T-t-t_p}{\tau}\right) (-k_p t_p + k_a t) \, p \, dt \tag{17}$$

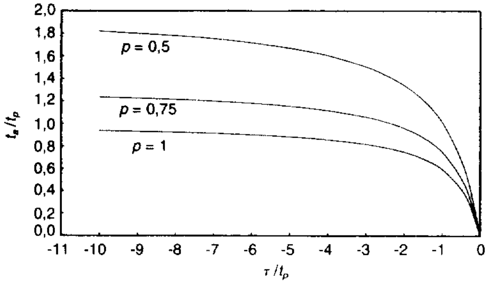
Dosazením do nerovnosti (9) získáme podmínku dostatečných zdrojů pro exponenciálně se měnící počet nových klientů:

$$p \leq \frac{\frac{\tau}{t_p}\left(\exp(t_p/\tau) - 1\right) - 1}{\frac{\tau}{t_a}\left(\exp(-t_a/\tau) - 1\right) + 1} \tag{18}$$

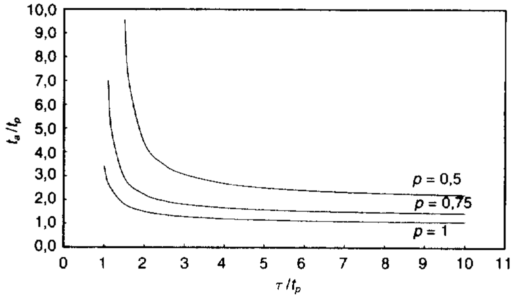
Podmínka (18) nám říká, jaký vztah musí být mezi dobou spoření do přidělení úvěru a dobou splatnosti tohoto úvěru při určité rychlosti změny počtu nových klientů τ a procentu využívání úvěrů p. Z hlediska bezpečnosti stavební spořitelny jsou samozřejmě nejdůležitější řešení pro $\tau < 0$, tedy pro klesající počet klientů. Křivky na *grafu 2a* znázorňují limitní poměr t_a/t_p potřebný pro splnění podmínky zdrojů pro různě rychlý pokles četnosti. Pa-

GRAF 2 Poměr mezi dobou spoření a dobou splatnosti t_a/t_p potřebný pro splnění podmínky dostatečných zdrojů při exponenciálně klesající (a) a rostoucí (b) četnosti přírůstku nových klientů. Parametrem je pravděpodobnost využití úvěru p.

a)



b)



rametrem je pravděpodobnost využití úvěru p. Z grafu je dobře patrné, že křivky pro $\tau \to -\infty$ (tedy malý pokles četnosti nových smluv) konvergují k hodnotě $1/p$.

Zajímavý je i opačný případ exponenciálního růstu četnosti klientů, který odpovídá kladným hodnotám parametru τ. Je zřejmé, že neustále rostoucí počet klientů může vytvářet dostatečné zdroje pro poskytování úvěrů s podstatně delší dobou splatnosti. Tento trend je patrný i z *grafu 2b*. Poměr t_a/t_p konverguje pro vysoká τ opět k hodnotě $1/p$. Zajímavější je však chování tohoto poměru při velmi rychlém růstu počtu klientů. Teoreticky by totiž bylo možné za jistých podmínek poskytovat úvěry s neomezenou dobou splatnosti. Přísun nových klientů by bylo možné stanovit opět z podmínky (18). Budeme-li požadovat řešení pro $p = 1$ a $t_a \to \infty$, dostaneme rovnici:

$$\frac{\tau}{t_p}\left(\exp(t_p/\tau) - 1\right) \geq 2 \qquad (19)$$

Jelikož hledáme nejmenší postačující hodnotu τ/t_p, můžeme nerovnost nahradit rovnítkem. Získáme tak transcendentní rovnici, kterou nelze převést na algebraickou, nicméně numerickým výpočtem je možné nalézt přibližné řešení $\tau/t_p = 0{,}8$. Znamená to tedy, že pokud by přírůstek nových klientů byl dostatečný, bylo by skutečně možné poskytovat všem klientům „věčné úvěry" (tedy takové, u kterých by nebylo požadováno splácení). Tím jsme se ovšem dostali do oblasti her spočívajících na pyramidovém efektu a výše uvedený výsledek má hodnotu pouze akademickou.

Shrnutí

Přes provedená zjednodušení je platnost nerovnosti (9) velmi obecná. Jediným omezením je předpoklad jednotného chování všech klientů. Rozšíření tohoto modelu tak, aby popisoval více rozdílných chování klientů, však není v zásadě obtížné a nepřináší žádné podstatné změny.

Oproti běžně užívaným numerickým postupům přináší analytický model velmi globální pohled na celý problém. Numericky je totiž možné pouze modelovat navržené scénáře chování klientů a zjišťovat jejich důsledky, kdežto z analytického modelu lze přímo odvodit, jaké chování klientů může být kritické. Širší využití je však limitováno složitostí výsledných matematických vztahů a v praxi je téměř vždy nutné výsledné rovnice řešit přibližnými numerickými metodami.

SUMMARY

Dynamic Model of the Bank in the Bausparkassen System

Petr KIELAR – Českomoravská stavební spořitelna, a. s.

Suggested dynamic model of the Bausparkassen system bank is targeted to the liquidity of this special sort of banks. The first part summarizes basic priciples of the Bausparkassen system. The description of the stationary state by means of SKLV (Sparer-Kassen-Leistungsverhältniss) coefficient is mentioned.

In the second part of the paper, general liquidity equation is derived, and applied to the ideal case with exponential growth or decline of the market. This new approach provides more detailed description of the problem, enabling modelling of the dynamic processes.