FINANCE A ÚVĚR 2/1995
ročník 45

Vydává Ministerstvo financí České republiky ve spolupráci s Českou národní bankou ve vydavatelství Economia, a. s., Praha

Adresa redakce: Vinohradská 49
120 74 Praha 2
Tel.: (02) 253 018 nebo: (02) 24 21 00 25, l. 6141
Fax: (02) 253 728

Šéfredaktor: Ing. Ivan Kočárník, CSc.

OBSAH

Informace

Uprostřed čísla:
Quarterly Economic and Fiscal Bulletin of the CR, No 1

FINANCE A ÚVĚR 2/1995
Volume 45

Publishers: Ministry of Finance of the Czech Republic in Cooperation with Czech National Bank in Publishing House Economia, Prague

Editor's Office: Vinohradská 49
120 74 Prague 2
Czech Republic

Editor in Chief: Ivan Kočárník

CONTENTS

Information

In the middle of this issue:
Quarterly Economic and Fiscal Bulletin of the CR, No 1

Opakovaně upozorňuje všechny naše čtenáře na změnu v distribuci našeho časopisu: od 1. 1. 1995 převzala distribuci časopisu a. s. Economia. Prosíme Vás proto, abyste se se svými požadavky týkajícími se odběru časopisu obraceli buď na obchodní úsek a. s. Economia (tel. 02/282 23 13), nebo úsek předplatného (tel. 02/282 37 54, 282 22 16, 282 23 16; fax pro oba úseky: 02/24 21 49 27). Na Slovensku zajišťuje distribuci a. s. Ecopress, Pribinova 25, 810 11 Bratislava, tel.: 07/321 688, fax: 07/210 36 08.

Redakce

OPRAVA Prosíme čtenáře, aby omluvili chybu v článku Kinkor—Vašková „Analýza působení standardních . . ." v č. 1/95: pod správnými nadpisy jsou zde zaměněny graf 1 a graf 2. Děkujeme Vám.

Redakce

DT: 519.86; 330.567.28 (100.2)

Modely oceňování aktiv*

Aleš BULÍŘ**

Rozvoj burzovních operací v České republice vzedmul vlnu zájmu o analýzu finančních operací a především o problematiku oceňování aktiv.[1] Jakkoli většině empirických příspěvků nelze vytknout žádné zásadní nedostatky, většina autorů se vyhýbala odvození obecných modelů založených na chování reprezentativního spotřebitele.[2] Předkládaný článek shrnuje několik jednoduchých (a často používaných) modelů všeobecné rovnováhy, jejichž výsledky představují obecné základy empirické analýzy finančních operací.

Model

Lagrangeovy funkce jsou tradičně používany k popisu a studiu různých situací, které se dotýkají chování spotřebitele. Nemusí se přitom nutně jednat o rozhodování v jednom časovém okamžiku, rozpočtové omezení může mít několik či třeba nekonečně mnoho období. V takovém případě většinou hovoříme o dynamickém programování nebo o intertemporální optimalizaci. Začněme jednoduchým odvozením modelu.[3]

Spotřebitel řeší v čase $t = 0$ úlohu, jak — za daných omezení — maximalizovat pro všechna budoucí období svůj užitek (U) ze spotřeby (C_t). Operátor E_0 popisuje subjektivní očekávání některých veličin našeho spotřebitele v čase $t = 0$. Neexistuje důvod, proč by tato očekávání neměla být tvořena jako racionální, což znamená, že tento spotřebitel nemá ve zvyku se systematicky mýlit. Při předpokladu racionálních očekávání také neexistuje důvod, proč by měl v budoucnu měnit svá očekávání, nemění-li se okolní prostředí ani výchozí podmínky. Při svém rozhodování se spotřebitel řídí základním poznatkem, že „koruna dnes má větší hodnotu než koruna zítra". Jinými slovy, budoucí hodnoty užitku (a ostat-

* Tento výzkum byl podporován grantem České grantové agentury.
Autor příspěvku je zavázán Janu Koderovi a posluchačům kurzu „Dynamické monetární ekonomie" za množství cenných připomínek k původní verzi tohoto textu. Všechny zbývající chyby a opomenutí je ovšem nutné přičíst autorovi samotnému.

** Doc. Ing. Ales Bulíř, MSc., CSc., katedra měnové teorie a politiky VŠE Praha

Redakce příspěvek obdržela 8. 11. 1994.

[1] Přístupný a empiricky zaměřený výklad výpočetních problémů modelu oceňování aktiv (CAPM) nabízí Berndt [1990].

[2] Za všechny jmenujme například články Janda [1994] nebo Hindls [1994].

[3] K důkladnějšímu výkladu analogických modelů dynamického programování srovnej [Sargent 1987].

ních proměnných) diskontuje subjektivním diskontním faktorem $\beta = 1/(1 + \delta)$. Spotřebitelova cílová funkce má potom podobu[4]:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t) \tag{1}$$

Cílová funkce spotřebitele je omezena rozpočtovým omezením[5]:

$$C_t + A_{t+1} \leq Y_t + R_t A_t \tag{2}$$

kde A je finanční aktivum s nominální hodnotou 1;
Y je důchod z pracovní činnosti;
R je hrubá úroková sazba ($R = 1 + r$).

Rozpočtové omezení nám říká, že z pracovního příjmu v běžném období (Y_t) a z běžných úrokových výnosů $R_t A_t$ náš spotřebitel financuje spotřebu běžného období a nákup nových aktiv A_{t+1}.

Předpokládejme, že rozpočtové omezení je splněno jako rovnost (užitková funkce $U(..)$ je striktně konkávní) a lagrangeán této úlohy je potom

$$\mathscr{L} = E_0 \sum_{t \geq 0} [\beta^t U(C_t) - \lambda(C_t + A_{t+1} - Y_t - R_t A_t)]$$

Snadno můžeme spočíst podmínky prvního řádu Lagrangeovy funkce. Nejprve budeme derivovat podle běžné spotřeby:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_t} = E_0 \beta^t [U'(C_t)] - E_0 \lambda_t = 0 \tag{3}$$

Povšimněme si, že ve výchozím období je $t=0$, a tudíž $\beta^0 = 1$. Podmínka prvního řádu je tedy:

$$E_0 [U'(C_0)] = \lambda_0 \tag{3a}$$

kde λ_t je „mezní užitek peněz". Analogicky musí platit tato závislost i pro všechna další období ($t > 0$):

$$E_0 \beta^t [U'(C_t)] = E_0(\lambda_t) \tag{3b}$$

Následující podmínka prvního řádu (derivujeme podle budoucích aktiv) je potom:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{t+1}} = - E_0 [\beta^t \lambda_t] + \beta^{t+1} E_0 [R_{t+1} \lambda_{t+1}] = 0 \tag{4}$$

což pro $t \geq 0$ opět můžeme zjednodušit do podoby:

$$E_0 (\lambda_t) = \beta E_0 (R_{t+1} \lambda_{t+1}) \tag{4a}$$

I tato závislost přirozeně platí pro všechna budoucí období. Vidíme, že současná očekávaná hodnota mezního užitku je známa: $E_0[U'(C_t)] = U'(C_t)$. Rovněž známe

[4] Tento zápis budeme číst jako „spotřebitel maximalizující očekávaný diskontovaný užitek".

[5] Na této úrovni abstrakce můžeme zanedbat otázku zdanění pracovních a kapitálových příjmů.

hodnotu λ_{t+1} a její substitucí do druhé podmínky prvního řádu, rovnice (4a), získáme klíčový vztah, který budeme opakovaně využívat:

$$U'(C_t) = \beta E_0[R_{t+1} U'(C_{t+1})] \tag{5}$$

Mezní užitek v čase t se rovná očekávanému užitku příštího období krát očekávaná úroková sazba krát subjektivní diskontní faktor. Tím, že obětujeme dnešní spotřebu výměnou za očekávaný budoucí výnos, musíme toto aktivum násobit (β krát R_{t+1}).

Další užitečnou informaci získáme vydělením rovnice mezním užitkem v čase $t=1$:

$$E_t\left[\beta R_{t+1} \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}\right] = 1 \tag{5a}$$

Vidíme, že očekávaný součin hrubé míry výnosu a intertemporální mezní míry substituce se musí rovnat 1. Současně je zřejmé, že jak R_{t+1}, tak $U'(C_{t+1}) / U'(C_t)$ nelze v daném modelu prognózovat, a tudíž jejich nejlepším ukazatelem pro odhad — vzhledem k dostupným informacím — je průměr jejich minulých hodnot.

Je možné předpokládat určité zjednodušení. Za prvé, nechť je úroková sazba z těchto aktiv konstantní v čase, $R_t = \overline{R}$, a subjektivní diskontní faktor je právě takový, že $\beta = 1/\overline{R}$. Nejlepším ukazatelem pro odhad C_{t+1} potom bude současná hodnota mezního užitku:

$$E_t[U'(C_{t+1})] = U'(C_t)$$

Jinými slovy, v krátkém období lze spotřebu úspěšně modelovat jako funkci minulé spotřeby.[6]

Vývoj spotřeby v čase

Předchozí výsledky naznačovaly intuitivní závěr, že budoucí spotřební rozhodnutí se odvíjejí od dnešních rozhodnutí. Spotřebitel se na počátku svého života rozhodl pro určitý plán vývoje spotřeby (dynamický program), který mu říká, co všechno chce spotřebovat do určitého konečného bodu *(T)* svého života. Spotřeba v jakémkoli okamžiku *T-i* tak závisí jednak na konečném cíli a jednak na spotřebě v předchozím období, tj. na průběžném plnění jeho osobního plánu spotřeby (dynamického programu).

Na čem závisí průběh plnění dynamického programu v čase? Předpokládejme, že užitková funkce je logaritmická: $U = \ln C_t$.[7] Dosazením získáme podmínku:

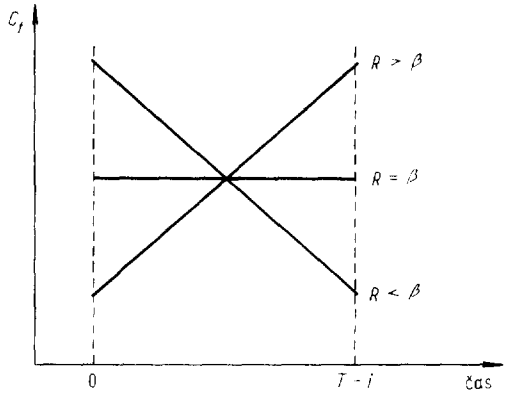
$$C_{t+1} = \beta R_{t+1} C_t \tag{9}$$

která popisuje intertemporální spotřební závislost. Je zřejmé, že růst či pokles spotřeby oproti předchozímu období závisí na vztahu mezi R a β, tj. na vztahu

[6] Empirický test této hypotézy srovnej v [Hall 1978].

[7] Srovnej [Branson 1989]. Zatímco matematické vlastnosti logaritmické funkce se příliš neliší od častěji používané Cobbovy-Douglasovy funkce, operace s logaritmickou užitkovou funkcí jsou podstatně jednodušší.

GRAF č. 1 Alternativní časové profily spotřeby



mezi tržním výnosem z dodatečné spotřeby v budoucnosti a subjektivně hodnocenou ztrátou z odložené dnešní spotřeby. Je-li $R>\beta$, spotřeba poroste, je-li $R<\beta$, spotřeba bude klesat — srovnej *graf č. 1*. Intuitivní vysvětlení říká, že na počátku životního cyklu je spotřebitelova ztráta z odložené spotřeby relativně nízká a β je relativně malé — jedinec zpočátku spoří a teprve postupně zvyšuje svou spotřebu.[8]

Cena akcie jako „náhodná procházka"

Následující příklad má už více realistických znaků skutečného kapitálového trhu. Především víme, že většina finančních aktiv je definována jednak cenou *(q)* a jednak dividendou, kterou tato aktiva nesou *(d)*. Je-li s počet aktiv, které náš jedinec drží (například počet kusů akcií), potom má modifikované rozpočtové omezení podobu:

$$Y_t + (q_t + d_t)s_t \geq C_t + q_t s_{t+1} \tag{7}$$

kde spotřebitel může použít na spotřebu a nákup nových aktiv (s_{t+1}) jen svůj pracovní důchod *(Y)* a výnos svých aktiv, který se skládá z ceny aktiv a z příslušné dividendy. Náš jedinec má k dispozici pracovní důchod Y a kapitálový důchod ze svých akcií či obligací.

Protože užitková funkce se nemění, lagrangeán je:

$$\mathscr{L} = E_0 \sum_{t \geq 0} \beta^t U(C_t) - \lambda[Y_t + (q_t + d_t)s_t - C_t - q_t s_{t+1}]$$

a podmínka prvního řádu podle C_t je identická jako v předchozím příkladu. Druhou podmínku prvního řádu získáme z parciální derivace Lagrangeovy funkce podle s_{t+1}:

[8] Je ovšem otázkou, zda velikost diskontního faktoru není funkcí důchodu (bohatství). Je pochopitelné, že „chudý" jedinec bude mít vysokou hodnotu diskontního faktoru β a nebude schopen odkládat svou spotřebu, a tudíž ani akumulovat bohatství. Jinými slovy: v takovém případě „chudí" ani nebudou schopni zbohatnout.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial s_{t+1}} = - E_t[\lambda_{t+1}\beta^{t+1}(q_{t+1} + d_{t+1})] + \lambda_t\beta^t q_t = 0 \tag{8}$$

kde po mechanickém dosazemí za λ odvodíme:

$$q_t U'(C_t) = E_t[\beta(q_{t+1} + d_{t+1})U'(C_{t+1})] \tag{8a}$$

Tato závislost nám říká, jakého dnešního užitku se musíme vzdát, abychom získali nová aktiva, v tomto případě akcie. V rovnovážné situaci musí platit, že očekávaný výnos posledního z těchto aktiv se rovná očekávané subjektivní ztrátě z odložení dnešní spotřeby. Vydělíme-li výše uvedený tvar členem $qU'(C_t)$, potom musí platit:

$$1 = E_t\left[\beta^t \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \quad \frac{q_{t+1} + d_{t+1}}{q_t}\right] \tag{9}$$

kde

$$\frac{q_{t+1} + d_{t+1}}{q_t} \approx R_{t+1}$$

je *hrubá výnosnost finančních investic.*

Předpokládejme nyní, že užitková funkce je lineární[9]; mezní užitek je potom konstantní a $U'(..)/U'(..) = 1$. Celý tvar se po vydělení β zjednoduší na:

$$E_t(q_{t+1} + d_{t+1}) = \beta^{-1}q_t \tag{10}$$

a vidíme, že současná cena akcie je nejlepším ukazatelem odhadu budoucího hrubého výnosu.

Je možné se pokusit o dvě další zjednodušení:

a) subjektivní diskontní faktor je roven 1 ($\beta = 1$), což znamená, že hodnotíme stejně dnešní i budoucí spořebu;

b) očekává se, že akcie v budoucnu neponese žádný výnos $d_{t+1} = 0$. Očekávaná cena akcie potom bude:

$$q_{t+1} = q_t + u_{t+1} \tag{10a}$$

kde u_{t+1} je náhodný člen s nulovou střední hodnotou a s konstantním rozptylem, nezávislým na ostatních prvcích modelu. Cena akcií se proto vyvíjí jako *náhodná procházka*, což je známý poznatek formulovaný teorií „efektivních trhů".[10]

Co ovšem výše uvedené restriktivní předpoklady? Diskontní faktor β může být blízký 1, zvláště pro krátké období. Poněkud sporným

Náhodná procházka popisuje situaci, kdy poslední informace je jediným východiskem pro budoucí vývoj. Intuitivní příklad: vyjdete-li mírně veselí z hostince, váš příští krok může vést kterýmkoli směrem a nemáte sklon k tomu se vracet na nejkratší přímou cestu. Zda nový krok učiníte doleva nebo doprava, je vždy znovu a znovu náhodnou veličinou.

[9] neboli $U_t = a + bC_t$, a tedy $dU_t/dC_t = b$

[10] Matematicky dostupný výklad teorie „efektivních trhů" nabízí například [Begg 1982].

předpokladem je naopak linearita užitkové funkce — musíme předpokládat, že investoři jsou neutrální vůči riziku. Stejného výsledku ovšem můžeme dosáhnout například s užitkovou funkcí, která vykazuje konstantní relativní averzi vůči riziku (CRRA). Nejméně realistický je předpoklad $d = 0$, protože dividendy jsou jen zřídka nulové. Můžeme ovšem předpokládat, že dividenda je v krátkém období náhodnou veličinou a do rovnice (10a) vstupuje pouze prostřednictvím náhodného členu u_t.

Cenové bubliny

Dalším zajímavým problémem jsou *cenové bubliny na finančních trzích*, při kterých se ceny akcií výrazně odchylují od svých fundamentálních hodnot. Předpokládejme, že (1) užitková funkce je stále lineární, (2) diskontní faktor se pohybuje v rozmezí $\beta \in (0,1)$ a (3) dividendy dosahují nějakých nepravidelných hodnot. Opusťme současně svět dvou časových období. Bude-li těchto období k, potom podle zákona iterativních expektací můžeme vztah mezi dnešní cenou a budoucím hrubým výnosem zapsat jako:

$$\begin{aligned} q_t &= E_t\left[\sum_{j=1}^{k} \beta^j d_{t+j}\right] + \beta^{k+1} E_t q_{t+k+1} \\ &= E_t\left[\sum_{j=1}^{k} \beta^j d_{t+j}\right] + \lim_{k\to\infty} \beta^k E_t q_{t+k} \end{aligned} \tag{11}$$

Uvedený zápis nám jen opakuje známý poznatek, že *cena aktiva se rovná očekávanému toku budoucích diskontovaných dividend.* Členu $E_t[\sum \beta^j d_{t+j}]$ říkáme „fundamentální faktor", neboť shrnuje fundamentální vlivy působící na cenu akcie: tok dividend. Druhý, limitní člen, zvaný také „terminální (koncová) podmínka", se rovná — z definice — nule, neboť β^t pro velké t konverguje k nule. Je intuitivně zřejmé, že pokud kupuje investor nějakou akcii se záměrem držet ji po celý svůj život, očekávaný diskontovaný tok dividend je pro něj mnohem významnější než očekávaná diskontovaná cena, za kterou akcii prodá v $t = k$. To ovšem platí jen tehdy, pokud cena aktiva dramaticky nevzroste.

Kdy tedy vlastně platí uvedená terminální podmínka, že

$$\lim_{k\to\infty} \beta^k E_t q_{t+k} = 0? \tag{12}$$

Jedině tehdy, pokud neočekáváme, že v čase $t \leq k$ dojde k explozi ceny tohoto aktiva. Očekáváme tedy, že cena aktiva q_{t+k} je zhruba podobná ceně výchozí.[11]

Co ovšem v případě, když terminální podmínka (12) *není* nulová? Současná cena aktiva by potom musela naplňovat podmínku:

$$q_{t+1} = \sum_{j\geq 1} \beta^j d_{t+j+1} + b_{t+1} \qquad b_{t+1} \neq 0 \tag{13}$$

resp.:

$$q_t = \beta d_{t+1} + \beta(q_{t+1} - b_{t+1}) + b_t \tag{14}$$

[11] Tento předpoklad není nerealistický. Většina firem se snaží zabránit nadměrnému růstu ceny svých akcií.

Podle (13) a (14) tedy musí platit, že:

$$E_t(b_{t+1}) = \beta^{-1} b_t > b_t$$

a b_t je nějaký *explozivní proces.*[12] Člen b_t popisuje hledanou cenovou bublinu, která představuje odchylku ceny akcií od fundamentálních faktorů. Aby bublina mohla existovat, musí být explozivní a musí v čase růst rychleji než β^{-1} (budoucí zvýšení ceny akcie je okamžitě diskontováno). Tento růst závisí na subjektivním očekávání jednotlivců ohledně ceny akcie.

Uvedený model vyvolává několik otázek. Jsou cenové bubliny realistické? Je možné je uvést do souladu s předpokladem veřejnosti vybavené racionálními očekáváními? Odpověď je v obou případech kladná. Existenci bublin nelze a priori vyloučit, neboť jsou založeny právě na očekáváních veřejnosti a v minulosti se mnohokrát vyskytly.

Pro formální odvození jejich existence použijeme *zákon iterativních očekávání.* Jeho intuitivní podoba je prostá: očekávaná hodnota (E_t) očekávané hodnoty nějaké proměnné x_{t+2} v čase $t+1$ (E_{t+1}) musí být shodná jako přímá očekávaná hodnota (E_t) oné proměnné x_{t+2}, formálně $E_t(E_{t+1}\, x_{t+2}) = E_t(x_{t+2})$.

Ukážeme, za jakých okolností je b explozivní proces. Dnešní cena se rovná diskontované hodnotě budoucí ceny a budoucí dividendy. Pro příští období musí platit:

$$E_t(q_{t+1} + d_{t+1}) = E_t\left[E_{t+1}\sum_{j\geq 1} \beta^j d_{t+1+j} + b_{t+1} + d_{t+1}\right]$$

$$= E_t\left[E_{t+1}\sum_{j\geq 2} \beta^{j-1} d_{t+j} + b_{t+1}\right] = \beta^{-1}\left[E_t\left(\sum_{j\geq 2} \beta^j d_{t+j}\right) + \beta E_t b_{t+1}\right] \qquad (15)$$

$$= \textit{fundamentální veličiny} + \beta^{-1} b_t$$

Vidíme, že bubliny nelze apriorně vyloučit, neboť jsou založeny na subjektivních očekáváních budoucího růstu ceny akcie. Existence bublin na finančních trzích vede k odchýlení cen akcií od jejich fundamentální hodnoty. V každém případě bublina musí nakonec splasknout a výsledkem je burzovní krach — náhlý a výrazný pokles cen, které se vracejí na úroveň svých fundamentálních hodnot. Splasknutí cenových bublin bylo v pozadí burzovních krachů v roce 1929, 1987, jakož i japonského poklesu cen akcií po roce 1991.

Struktura úrokových sazeb z hlediska času[13]

Následující model by nám měl objasnit další zajímavou vlastnost finančních trhů: existenci *prémie za riziko*, resp. *srážky za riziko*. Jinými slovy: za jakých podmínek některá riziková aktiva nesou nižší nebo vyšší očekávaný výnos než aktiva bezpečná? Náš model rozšíříme o existenci krátko- a dlouhodobých obligací.

Náš spotřebitel opět maximalizuje stejnou užitkovou funkci, ovšem se změněným rozpočtovým omezením:

[12] Připomínáme, že platí $\beta \in (0,1)$ a $\beta^{-1} > 1$.

[13] Tento model bývá často v literatuře označován jako „Lucasův model".

$$C_t + B^{I}_{t+1} + B^{II}_{t+1} \leq Y_t + R^{I}_t B^{I}_t + R^{II}_t B^{II}_t \tag{16}$$

kde B^{II} je obligace s dobou splatnosti 2 období,
R^{II} je její úroková sazba dohodnutá v čase $t-2$,
B^{I} je obligace s dobou splatnosti 1 období,
R^{I} je její úroková sazba dohodnutá v čase $t-1$.

Sestavení lagrangeánu je stejné jako v předchozích příkladech. Nemění se ani parciální derivace podle C_t. Odvoďme si ovšem podmínky prvního řádu u jednotlivých typů obligací:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial B^{I}_{t+1}} = -\lambda_t + \beta E_t \lambda_{t+1} R^{I}_t = 0 \tag{17}$$

resp.:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial B^{II}_{t+1}} = -\lambda_t + \beta E_t \lambda_{t+1} R^{II}_t = 0 \tag{18}$$

Pro krátkodobou obligaci (B^{I}) odvodíme opakovanou substitucí:

$$\begin{aligned} U'(C_t) &= \lambda_t \\ &= \beta E_t [R^{I}_t U'(C_{t+1})] \end{aligned} \tag{17a}$$

a podobně pro dvouletou obligaci (B^{II}) bude platit:

$$U'(C_t) = \beta^2 E_t [R^{II}_t U'(C_{t+2})] \tag{18a}$$

Úroková sazba jednoleté obligace, která je dojednána v čase $t-1$, musí být taková, aby splňovala následující závislost, kterou jsme získali přepisem podmínky prvního řádu:

$$(R^{I}_t)^{-1} = E_t\left[\beta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}\right] \tag{17b}$$

Podobně odvodíme pro dvouletou obligaci:

$$\begin{aligned} (R^{II}_t)^{-1} &= E_t\left[\beta^2 \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}\right] \\ &= E_t\left[\beta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \beta \frac{U'(C_{t+2})}{U'(C_{t+1})}\right] \end{aligned} \tag{18b}$$

a protože spotřeba a úrokové sazby nejsou nezávislé, podle zákona iterativních expektací musí platit:

$$\begin{aligned} &E_t\left[\beta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \cdot E_{t+1} \beta \frac{U'(C_{t+2})}{U'(C_{t+1})}\right] \\ &= (R^{I}_t)^{-1} \cdot (R^{I}_{t+1})^{-1} + \operatorname{cov}\left[\beta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}; (R^{I}_{t+1})^{-1}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

tedy že úroková sazba dvouleté obligace je rovna součinu úrokových sazeb dvou jednoletých obligací (komponovaná úroková sazba) plus kovarianční člen, popisující *prémii za riziko*. Jeho existence vyplývá z pravidla pro počítání s očekávanými hodnotami:

$$E(X, Y) = E(X)\,E(Y) + \mathrm{cov}(X, Y)$$

Jedná se o kovarianci mezi intertemporální mezní mírou substituce a úrokovou sazbou krátkodobé obligace v příštím období.

Jaká je ekonomická intuice tohoto vztahu? Začněme situací, kdy cov (. .) je kladná. Cov (. .) > 0 říká, že úroková sazba z krátkodobé obligace (R^{I}_{t+1}) a spotřeba C_{t+1} se pohybují stejným směrem, neboli že výnos obligace a spotřeba jsou procyklické. Jinými slovy, krátkodobá obligace nese vyšší výnos v období, kdy je spotřeba už tak jako tak vysoká. Ze vztahu (19) je zřejmé, že úroková sazba dvouleté obligace je nižší než hodnota komponované úrokové sazby právě o hodnotu kovariančního členu. Lidé jsou ochotni držet B^{II} i při nižším úroku v důsledku nevhodné rizikové charakteristiky krátkodobé obligace: ta vynáší více tehdy, když celková úroveň důchodů je vysoká. Dlouhodobá obligace má naopak *srážku za riziko* — vynáší v obdobích, kdy ostatní příjmy (například pracovní) jsou nízké. Je to cenný papír, který má anticyklický výnos.

> ***Nezávislost náhodných veličin***
>
> Dvě náhodné proměnné X a Y jsou nezávislé, jestliže
> $E(XY) = E(X)\,E(Y)$, pokud
> $E(X)\,E(Y)$ existují. Pokud nejsou nezávislé, vedle součinu očekávaných hodnot musí existovat člen popisující vzájemnou závislost X a Y.
> Tímto členem je *kovariance* mezi X a Y značená jako (cov).

Naopak, je-li cov(. .) < 0, potom dvouletá obligace musí nést vyšší výnos, než kolik je komponovaná úroková sazba, a B^{II} nese *prémii za riziko*. Dlouhodobý cenný papír má zřejmě cyklický výnos. Protože ve většině případů je kovariance záporná a dlouhodobý cenný papír vyžaduje prémii za riziko, tento model vysvětluje jeden aspekt rostoucího sklonu výnosové křivky.[14]

Oceňování nominální obligace

Následující model umožňuje studovat další dva problémy. Za prvé, tento typ modelu je opět o něco realističtějším popisem skutečnosti, neboť zavádí další omezení, tzv. „cash-in-advance" omezení (CIA). Má-li jednotlivec spotřebovávat, musí nejprve držet hotovostní (likvidní) peníze. Toto omezení, někdy také nazývané Clowerovo omezení, říká, že „peníze kupují zboží, zboží kupuje peníze, ale zboží nekupuje zboží". Za druhé, tento model dovoluje vyslovit obecný poznatek, za jakého typu monetární politiky je obligace nesoucí nominální výnos výhodná. Jinými slovy, do rozhodování spotřebitele zavádíme problém inflace.

Užitková funkce, kterou maximalizují jednotlivci, je stejná jako v předchozích příkladech. Prvním omezením užitkové funkce je rozšířené rozpočtové omezení spotřebitele, kam nově patří reálné peněžní zůstatky M/P, nepřímé daně τ, „reálná" obligace b nesoucí fixně stanovený reálný výnos ($R = 1 +$ reálná úroková sazba) a nominální obligace B nesoucí fixně stanovený nominální výnos ($\rho = 1 +$ nominální úroková sazba).[15] M/P je optimální objem reálné peněžní zásoby odvo-

[14] Tento model samozřejmě nevysvětluje druhý aspekt rostoucí výnosové křivky — převis poptávky po dlouhodobém kapitálu.

[15] V řadě zemí vlády nabízejí vedle obligací s nominálním výnosem také „indexované obligace", které zaručují určitý předem dohodnutý reálný výnos. Tento reálný výnos je mechanicky upraven o míru inflace v minulém období.

zený z Clowerova omezení uvaleného na spotřební výdaje, tj. transakční poptávka po penězích. Protože jak peněžní zůstatky, tak nominální obligace jsou vyjádřeny v nominálních veličinách, musíme je deflovat cenovou hladinou:

$$\frac{\tilde{M}_t}{P_t} + \tau_t + q_t s_t + b_t + \frac{B_t}{P_t} + C_t = \frac{\tilde{M}_{t-1}}{P_t} + q_t s_{t-1} + R_{t-1} b_{t-1} + \rho_{t-1} \frac{B_{t-1}}{P_t} \tag{20}$$

Druhým omezením je už zmiňovaný „cash-in-advance": nelze nakoupit za více, než kolik reálných peněžních zůstatků jednotlivec drží na počátku období:

$$C_t \leq \frac{\tilde{M}_t}{P_t} \tag{21}$$

Třetím omezením potom je, že peněžní zásoba (M) je použitelná na spotřebu (první člen na pravé straně) a výplatu kapitálových výnosů veřejnosti (druhý člen na pravé straně). Veličina d_t popisuje novou produkci této ekonomiky:

$$M_t = (\tilde{M}_t - P_t C_t) + P_t d_t s_t \tag{22}$$

Z tohoto omezení získáváme další informaci. Je-li Clowerovo omezení splněno jako rovnost a budeme-li normalizovat počet akcií ($s_t = 1$), potom rovněž vidíme, že $P_t = (d^{-1}) M_t$. Jinými slovy, platí kvantitativní rovnice směny: ceny se vyvíjejí proporcionálně s peněžní zásobou.

Langrangeán je poněkud delší, ovšem postup jeho konstrukce se nemění. Povšimněme si, že třetí omezení bylo vyděleno P_t.

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = {} & E_t \sum_{t \geq 0} \beta^t U(C_t) \\ & - \lambda_1 \left[\frac{\tilde{M}_t}{P_t} + \tau_t + q_t s_t + b_t + \frac{B_t}{P_t} + C_t - \frac{M_{t-1}}{P_t} - q_t s_{t-1} - R_{t-1} b_{t-1} - \rho_{t-1} \frac{B_{t-1}}{P_t} \right] \\ & - \lambda_2 \left[C_t - \frac{\tilde{M}_t}{P_t} \right] - \lambda_3 \left[\frac{M_t}{P_t} - \left(\frac{\tilde{M}_t}{P_t} - C_t \right) + d_t s_t \right] \end{aligned}$$

Jednotlivé podmínky prvního řádu jsou po úpravách:

$$(\tilde{M}_t): \qquad \lambda_{1,t} = \lambda_{2,t} + \lambda_{3,t} \tag{23}$$

$$(C_t): \qquad U'(C_t) = \lambda_{1,t} = \lambda_{2,t} + \lambda_{3,t} \tag{24}$$

Podmínku pro držbu „reálných" obligací:

$$(b_t): \qquad \lambda_{1,t} = \beta R_t E_t (\lambda_{1,t+1}) \tag{25}$$

upravíme dosazením za $\lambda_{1,t}$:

$$\frac{\beta}{U'(C_t)} R_t E_t [U'(C_{t+1})] = 1 \tag{25a}$$

Zajímavá je také podmínka prvního řádu pro nominální obligace:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial B_t} = -\lambda_{1,t} P_t^{-1} + E_t\left(\beta \lambda_{1,t+1} \frac{\rho_t}{P_{t+1}}\right) = 0 \tag{26}$$

Po úpravách získáme:

$$\frac{\beta}{U'(C_t)} \rho_t P_t E_t \left[\frac{U'(C_{t+1})}{P_{t+1}}\right] = 1 \tag{26a}$$

Porovnáním (25a) a (26a) a po příslušných úpravách platí:

$$\rho_t P_t E_t \left[\frac{U'(C_{t+1})}{P_{t+1}}\right] = R_t E_t [U'(C_{t+1})] \tag{27}$$

Z tohoto výrazu už snadno získáme tvar úrokové sazby, kterou nese naše nominální obligace:

$$\rho_t^{-1} = R_t^{-1} \left\{ \frac{E_t [U'(C_{t+1}) / P_{t+1}]}{E_t [U'(C_{t+1}) / P_t]} \right\}$$

Pravá strana tohoto výrazu je opět součinem podmíněných očekávaných hodnot mezního užitku a budoucích cen, které zřejmě nejsou navzájem nezávislé. Z podmínek prvního řádu také však víme, že $R_t E_t[U'(C_{t+1})] = U'(C_t)/\beta$. Spočteme proto:

$$\rho_t^{-1} = R_t^{-1} \frac{E_t P_{t+1}^{-1}}{P_t^{-1}} + \frac{\operatorname{cov}[U'(C_{t+1}); P_{t+1}]}{R_t E_t [U'(C_{t+1})] P_t^{-1}}$$

a zjednodušíme do konečného tvaru:

$$\rho_t^{-1} = R_t^{-1} \frac{E_t P_{t+1}^{-1}}{P_t^{-1}} + \operatorname{cov}\left[\beta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}; \frac{P_t}{P_{t+1}}\right] \tag{29}$$

Pokusme se nyní o ekonomickou interpretaci výsledné rovnice. Pokud neexistuje nejistota ohledně budoucího vývoje inflace, je P_{t+1} konstantní a kovarianční člen je roven nule. Platí tedy:

$$\rho_t = R_t \frac{P_{t+1}}{P_t} \tag{29}$$

což je známý zápis Fisherovy rovnice, podle které je nominální úroková sazba rovna součinu reálné úrokové sazby a míry inflace.

Kovarianční člen může být nulový, a přesto může existovat nejistota ohledně budoucích cen. Proto je správnější do Fisherovy rovnice dosadit očekávanou inflaci, a nikoliv inflaci minulou[16]:

$$\rho_t = R_t E_t \left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \tag{29a}$$

Kovarianční člen ovšem nemusí být nulový. Je-li $\operatorname{cov}(..) > 0$, potom $\rho_t^{-1} > R_t^{-1}$, a tudíž $\rho_t < R_t$. Nominální obligace není atraktivní, neboť vynáší nadprůměrný výnos jen tehdy, když všechna ostatní aktiva, stejně jako pracovní činnost vynášejí nadprůměrné výnosy. Z čeho je odvozeno toto tvrzení? Víme, že platí kvantitativní rovnice směny a současně existuje kladná kovariance mezi inflací a spo-

[16] Bohužel platí, že při praktických výpočtech není spolehlivý odhad očekávané inflace téměř nikdy k dispozici.

třebou. Monetární politika je tedy *procyklická*. Procyklická monetární politika znamená, že klesá-li spotřeba v ekonomice, bude klesat peněžní zásoba a cenová hladina. Při hospodářské expanzi naopak dojde k monetární expanzi.

Je-li ovšem monetární politika politikou *proticyklickou*, platí, že při snížení spotřeby C dojde ke zvýšení M a porostou ceny. Kovariance bude záporná a $\rho_t > R_t$. Pouze v takovém případě je nominální obligace atraktivní finanční investicí, neboť proticyklická monetární politika zajistí, že úroky jsou v průměru nižší a výnos obligace nekolísá s inflací.

Závěr

V předloženém článku jsme diskutovali několik jednoduchých variant modelů všeobecné rovnováhy použitelných pro oceňování finančních aktiv. Modely všeobecné rovnováhy nabízejí jednoduchou a elegantní teoretickou základnu pro empirické modelování vývoje finančních trhů a chování reprezentativního spotřebitele.

LITERATURA

BEGG, D. K.: *The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics*. Philip Allan, New York 1982.

BERNDT, E. R.: *Econometrics: Classic and Contemporary*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. 1990.

BRANSON, W.: *Macroeconomic Theory and Policy*. Harper & Row, New York 1989.

HALL, R. E.: Stochastic Implications of the Lifecycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence. *Journal of Political Economy*, vol. 86, 1978, ss. 971—988.

HINDLS, R.: K možnostem předpovědí vývoje kurzových pásem na trhu cenných papírů. *Politická ekonomie*, 1994, č. 3, ss. 339—349.

JANDA, K.: Modelování rizika akciového portfolia. *Finance a úvěr*, 1994, č. 9, ss. 463—472.

SARGENT, T. J.: *Dynamic Macroeconomic Theory*. Harvard Academic Press, Cambridge, Mass. 1987.

SUMMARY

Models of Assets' Assesment

Aleš BULÍŘ, Department of Monetary Theory and Policy of the Prague School of Economics

The rapid development of financial markets in the Czech republic triggered interest in modelling financial market operations. Most of the recently published papers focused, however, on the computational or statistical properties of the problem.

This paper discusses the general theory behind those empirical models. A simple dynamic model of an infinitely lived representative consumer under different constraints is derived. The following situations are being discussed: the development of consumption over time, „random walk" hypothesis of asset pricing, asset bubbles, term structure of interest rates and nominal bond pricing. It is shown that most of the habitually used notions can be easily reconciled with the general theory.